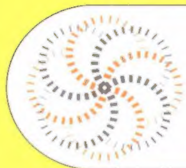
陆云光　成志新　编著

双曲守恒律和补偿列紧方法





科学出版社

(O-4518.0101)

www.sciencep.com



科学出版社 工程技术分社
电话：(010) 64017506
Email：niuyufeng@mail.sciencep.com

销售分类建议：高等数学

定 价：50.00 元

双曲守恒律和补偿列紧方法

陆云光　成志新　编著

科 学 出 版 社
北　京

内 容 简 介

本书系统地介绍了补偿列紧方法在单个守恒律方程和一些双曲守恒律系统中的应用. 主要内容包括: 单个守恒律方程的 L^∞ 解或 L^p 解; 二次流系统、Le Roux 系统、等熵气体动力学系统、一维欧拉方程组和弹性力学系统等双曲守恒律系统的 L^∞ 解, 以及弹性力学系统的 L^p 解; 双曲守恒律系统的零松弛现象.

本书可供理工科大学数学、应用数学和其他相关专业的高年级本科生、研究生、教师以及相关的科学工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

双曲守恒律和补偿列紧方法/陆云光, 成志新编著. —北京: 科学出版社, 2011
ISBN 978-7-03-032590-7

Ⅰ.①双… Ⅱ.①陆… ②成… Ⅲ.①补偿法-应用-双曲型方程: 守恒方程-研究 Ⅳ.①O175.27 ②O241

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 214433 号

责任编辑: 牛宇锋 / 责任校对: 陈玉凤
责任印制: 赵 博 / 封面设计: 王 浩

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 12 月第 一 版 开本: 720×1000 1/16
2011 年 12 月第一次印刷 印张: 13 1/2
字数: 262 000

定价: 50.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

本书是围绕作者多年来的研究工作写成的, 大部分内容取材于作者发表的论文. 为了保持本书的系统性, 某些章节也介绍了国内外核心期刊发表的他人工作.

双曲守恒律是偏微分方程研究领域的一个主要分支. 大量问题来自于物理、化学、生物、力学等中的自然现象, 因而对双曲守恒律的研究具有非常强的应用背景和理论价值.

本书共分 16 章, 介绍了补偿列紧方法在单个守恒律方程和一些双曲守恒律系统中的应用. 主要内容包括: 单个守恒律方程的 L^∞ 或 L^p 解的存在性; 二次流系统、Le Roux 系统、等熵气体动力学系统、一维欧拉方程组和弹性力学系统等非线性双曲守恒律系统的 L^∞ 解的存在性, 以及弹性力学系统的 L^p 解的存在性; 双曲守恒律系统的零松弛现象.

本书除少数几章外, 章末都有评注, 介绍正文未涉及的问题或有关问题的最新成果和方法, 以及正文内容的出处、历史与现状.

在写作过程中, 杭州师范大学理学院的领导一直给予支持与帮助, 第二作者所在单位盐城师范学院的领导也一直给予支持与帮助, 在此深表谢意.

此外, 本书的出版得到杭州师范大学海外人才引进基金、浙江省千人计划项目的资助, 也得到科学出版社的大力支持. 谨此致谢.

限于作者水平, 书中难免存在不足及疏漏之处, 恳请读者批评指正.

陆云光
杭州师范大学
成志新
盐城师范学院
2011 年 9 月 2 日

目 录

第1章 绪　　论

双曲守恒律系统是非常重要的数学模型，可以用来描述许多出现于交通流、流体力学、弹性力学、气体动力学和流体动力学等中的物理现象. 一般来说，即使初值小且光滑，非线性双曲守恒律系统的柯西问题也不存在全局古典解，这意味着解通常会在某个有限时刻出现间断，即产生激波. 因为解不连续而不能在古典意义下满足方程组，所以我们必须研究它的广义解，即在分布意义下满足方程组的函数.

考虑具有下述形式的拟线性偏微分方程组：

$$\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})_x = \boldsymbol{0}, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \tag{1.0.1}$$

其中，向量函数 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x,t) = (u_1(x,t), \cdots, u_n(x,t))^{\mathrm{T}}$ 中的每个分量表示守恒物理量的密度；$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = (f_1(\boldsymbol{u}), \cdots, f_n(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}} \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ 为流函数. 通常这些方程组称为双曲守恒律. 假设 $\boldsymbol{u}$ 是系统 (1.0.1) 带可测初值

$$\boldsymbol{u}(x,0) = \boldsymbol{u}_0(x) \tag{1.0.2}$$

的柯西问题的古典解，则用试验函数 $\phi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ 乘方程组 (1.0.1) 并在 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ 上分部积分得

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [\boldsymbol{u}\phi_t + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})\phi_x]\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^\infty \boldsymbol{u}_0\phi\mathrm{d}x = \boldsymbol{0}. \tag{1.0.3}$$

定义 1.0.1　*称函数 $\boldsymbol{u}(x,t) \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+; \mathbb{R}^n)$ $(1 < p \leqslant \infty)$ 为柯西问题 (1.0.1)-(1.0.2) $(\boldsymbol{u}_0(x) \in L^p(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n))$ 的弱解，如果等式 (1.0.3) 对任意的试验函数 $\phi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ 成立.*

解的存在性问题是非线性双曲守恒律系统理论中的一个重要方面. 它有助于检验建立的数学模型是否合理，问题是否适定等. 为了得到所给双曲守恒律的弱解或广义解，一个标准的方法是在方程组 (1.0.1) 的右边加上小的抛物扰动项 $\varepsilon\boldsymbol{u}_{xx}$，然后考虑

$$\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})_x = \varepsilon\boldsymbol{u}_{xx}, \tag{1.0.4}$$

其中，$\varepsilon > 0$ 是常数，称为黏性参数. 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，可由下述关于一般拟线性抛物型方程组解的存在性及其性质的定理得到柯西问题 (1.0.4)-(1.0.2) 的解.

定理 1.0.1 (1) 设初值 $u_0(x)$ 有界可测, 则对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 柯西问题 (1.0.4)–(1.0.2) 存在唯一的局部光滑解 $\boldsymbol{u}^\varepsilon(x,t) \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0,\tau); \mathbb{R}^n)$, 其中 $\tau > 0$ 只与初值的 L^∞ 范数有关.

(2) 若解 $\boldsymbol{u}^\varepsilon(x,t)$ 有先验 L^∞ 估计 $\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(x,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times[0,T])} \leqslant M(\varepsilon, T)$, 则解 $\boldsymbol{u}^\varepsilon(x,t)$ 在 $\mathbb{R} \times [0,T]$ 上存在唯一.

(3) 若 $\boldsymbol{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, 且 $\lim\limits_{|x|\to\infty} \boldsymbol{u}_0(x) = \mathbf{0}$, 则解 $\boldsymbol{u}^\varepsilon(x,t)$ 满足

$$\lim_{|x|\to\infty} \boldsymbol{u}^\varepsilon(x,t) = \mathbf{0} \text{ 对 } t \in [0,T] \text{ 一致成立}. \tag{1.0.5}$$

(4) 进一步, 若系统 (1.0.2) 中的某个方程具有如下形式:

$$w_t + (wg(\boldsymbol{u}))_x = \varepsilon w_{xx}, \tag{1.0.6}$$

其中, 函数 $g(\boldsymbol{u}) \in C(\mathbb{R}^n)$. 则

$$w^\varepsilon(x,t) \geqslant c(t,\varepsilon,\delta) > 0, \quad \text{如果 } w_0(x) \geqslant \delta > 0. \tag{1.0.7}$$

其中, δ 为正常数, 函数 $c(t,\varepsilon,\delta)$ 可能在时间 t 趋于无穷或 ε 趋于零时趋于零.

证明 (1) 首先运用 Green 核 $G^\varepsilon(x-y,t) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} \exp\left\{-\dfrac{(x-y)^2}{4t}\right\}$ 把柯西问题 (1.0.4)–(1.0.2) 写成与其等价的积分方程

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(x,t) = &\int_{-\infty}^{\infty} G^\varepsilon(x-y,t)\boldsymbol{u}_0(y)\mathrm{d}y \\ &+ \int_0^\infty \mathrm{d}s \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(y,s)) \frac{\partial G^\varepsilon(x-y,t-s)}{\partial y}\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

然后由压缩映像原理即可证得解的局部存在性.

(2) 若解 $\boldsymbol{u}^\varepsilon(x,t)$ 有先验 L^∞ 估计 $\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(x,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times[0,T])} \leqslant M(\varepsilon,T)$, 则由结论 (1), 步长时间 τ 只与 $M(\varepsilon,T)$ 有关, 所以解 $\boldsymbol{u}^\varepsilon(x,t)$ 可逐步延拓到整个 $[0,T]$ 上.

(3) 由得到局部解的过程不难看出解的性质 (1.0.5).

结论 (1)~(3) 的详细证明请读者参阅专著 [1, 2]. 下面是由 Bereux 和 Sainsaulieu 对 (1.0.7) 给出的证明, 请参阅文献 [3, 4].

(4) 令 $v = \ln w$, 则可把方程 (1.0.6) 写成如下形式:

$$v_t + g(\boldsymbol{u})v_x + g(\boldsymbol{u})_x = \varepsilon(v_{xx} + v_x^2),$$

即

$$v_t = \varepsilon v_{xx} + \varepsilon\left(v_x - \frac{g(\boldsymbol{u})}{2\varepsilon}\right)^2 - g(\boldsymbol{u})_x - \frac{g^2(\boldsymbol{u})}{4\varepsilon}. \tag{1.0.8}$$

方程 (1.0.8) 带初值 $v_0(x) = \ln w_0(x)$ 的解可表示为

$$
\begin{aligned}
v(x,t) = &\int_{-\infty}^{\infty} G^{\varepsilon}(x-y,t)v_0(y)\mathrm{d}y \\
&+ \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \left(\varepsilon \left(v_x - \frac{g(\boldsymbol{u})}{2\varepsilon} \right)^2 - \frac{g^2(\boldsymbol{u})}{4\varepsilon} - g(\boldsymbol{u})_x \right) G^{\varepsilon}(x-y,t-s)\mathrm{d}y\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

由于

$$
\int_{-\infty}^{\infty} G^{\varepsilon}(x-\xi,t)\mathrm{d}\xi = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial G^{\varepsilon}(x-y,t-s)}{\partial y} \right| \mathrm{d}y\mathrm{d}s = \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon t}} \quad (t>0),
$$

所以

$$
\begin{aligned}
v \geqslant &\ln\delta + \int_0^t \mathrm{d}s \int_{-\infty}^{\infty} g(\boldsymbol{u}(y,s)) \frac{\partial G^{\varepsilon}(x-y,t-s)}{\partial y} \\
&- \frac{g^2(\boldsymbol{u}(y,s))}{4\varepsilon} G^{\varepsilon}(x-y,t-s)\mathrm{d}y \\
\geqslant &\ln\delta - C_1\sqrt{\frac{t}{\varepsilon}} - \frac{C_2}{\varepsilon}t - C_3 t = -C(t,\varepsilon,\delta) > -\infty.
\end{aligned}
$$

这表明 $w^{\varepsilon}(x,t)$ 有一个正下界 $c(t,\varepsilon,\delta)$, 即 (1.0.7) 获证. 证毕. □

定理 1.0.1 中得到的解称为黏性解. 若已经得到一列黏性解 $\{\boldsymbol{u}^{\varepsilon}\}$, 并且 $\{\boldsymbol{u}^{\varepsilon}\}$ 在 $L^p(1 < p \leqslant \infty)$ 中关于 ε 一致有界, 则存在其子列 $\{\boldsymbol{u}^{\varepsilon}\}$ 使得

$$
\boldsymbol{u}^{\varepsilon}(x,t) \rightharpoonup (\text{或} \overset{*}{\rightharpoonup})\ \boldsymbol{u}(x,t)\ (\varepsilon \to 0);
$$

而且存在子列 $\{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}^{\varepsilon})\}$ 使得

$$
\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}^{\varepsilon}(x,t)) \rightharpoonup (\text{或} \overset{*}{\rightharpoonup})\ \boldsymbol{l}(x,t)\ (\varepsilon \to 0),
$$

如果 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$ 满足适当的增长性条件. 今后除非特别说明, 无论怎样选取 $\{\boldsymbol{u}^{\varepsilon}\}$ 的子列, 仍把它记为 $\{\boldsymbol{u}^{\varepsilon}\}$. 若

$$
\boldsymbol{l}(x,t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(x,t)), \quad \text{a.e. } (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \tag{1.0.9}
$$

则在 (1.0.4) 中令 $\varepsilon \to 0$, 即知 $\boldsymbol{u}(x,t)$ 是柯西问题 (1.0.1)-(1.0.2) 的一个弱解. 可如何得到非线性流函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$ 关于黏性解序列 $\{\boldsymbol{u}^{\varepsilon}\}$ 的弱连续性 (1.0.9) 呢? 这就要借助于补偿列紧理论.

为何这个理论称为 "补偿列紧"? 粗略地说, 这个术语源于下面的事实:

若一列函数 $\{w^{\varepsilon}(x,t)\}$ 满足

$$
w^{\varepsilon}(x,t) \rightharpoonup w(x,t) \tag{1.0.10}
$$

且

$$(w^{\varepsilon})^2 + (w^{\varepsilon})^3 \rightharpoonup w^2 + w^3 \text{ 或者 } (w^{\varepsilon})^2 - (w^{\varepsilon})^3 \rightharpoonup w^2 - w^3, \tag{1.0.11}$$

则一般来说, $w^{\varepsilon}(x,t)$ 非紧; 但若 (1.0.11) 中的任一弱紧用来 "补偿" 另一弱紧就会得到 $w^{\varepsilon}(x,t)$ 的紧性. 事实上, 把它们相加就有 $(w^{\varepsilon})^2 \rightharpoonup w^2$, 这与 (1.0.10) 相结合就蕴涵着 w^{ε} 的紧性.

本书主要介绍补偿列紧方法在单个守恒律方程和一些由两个或三个方程组成的特殊系统中的应用, 也讨论了补偿列紧方法在一些带松弛扰动的物理学系统中的应用. 本书其余章节的内容安排如下:

第 2 章介绍补偿列紧理论中的几个重要定理, 如 Young 测度表示定理、二阶行列式的弱连续性定理以及紧嵌入定理等.

第 3 章讨论标量方程带 L^{∞} 初值和 L^{p} 初值的柯西问题, 并且对标量方程 L^{∞} 解和 L^{p} 解的存在性给出一个没有应用 Young 测度的简化证明.

第 4 章有两部分. 第一部分介绍与 2×2 双曲守恒律系统相关的一些基本概念, 如严格双曲、真正非线性、线性退化、黎曼不变量以及熵-熵流等; 第二部分介绍得到黏性解的 L^{∞} 估计的一个框架, 即不变域理论.

第 5 章研究一个特殊的对称双曲系统. 该系统与标量方程非常相似, 因为它的一个特征场总是线性退化, 尽管另外一个特征场真正非线性. 这个系统非常有趣, 因为沿着真正非线性的特征场不需要任何正则性条件就可得到黏性解序列在 L^{∞} 空间中的紧性, 但沿着线性退化的特征场必须加上一些正则性条件 (如有界变差估计) 以确保黏性解序列的紧性.

第 6 章研究一个特殊的二次流系统. 该系统在原点非严格双曲, 两个特征场分别在 u 的正、负半轴上线性退化, 其熵方程和绝热指数 $\gamma = 2$ 时的多方气体动力学系统的熵方程相同. 用补偿列紧方法研究这个系统的主要困难是熵-熵流在原点奇异. 通过对经典 Fuchsian 方程的解及其性质的分析, 显式地构造了二次流系统的四族 Lax 型熵-熵流, 并且得到了关于这些熵的必要估计.

第 7 章利用第 6 章给出的方法研究 Le Roux 系统, 它也在原点非严格双曲, 但熵方程和绝热指数 $\gamma = 5/3$ 时的多方气体动力学系统的熵方程相同. 这个系统是典型的 Temple 型系统, 其两个特征场都是直线.

第 8 章有六部分, 研究最具代表性的双曲守恒律系统即所谓的等熵气体动力学系统. 第一部分至第三部分讨论 $\gamma > 1$ 时的多方气体动力学系统的 L^{∞} 熵解; 第四部分利用前面建立的框架研究推广的河流系统; 第五部分借助解析开拓理论结合补偿列紧方法证明等温气体动力学系统广义解的存在性; 第六部分对一般的等熵气体动力学系统作了一些研究.

第 9 章有三部分. 第一、二部分利用第 6、7 章中的方法研究两个特殊的一

维欧拉方程组. 就光滑解而言, 它们分别等价于多方气体动力学系统 $\gamma > 3$ 和 $\gamma = \infty$ 的情形. 第三部分应用补偿列紧方法和动力学公式相结合的思想得到一个经典的欧拉方程组的 L^∞ 熵解. 该方程组与多方气体动力学系统有着相同的熵-熵流.

第 10 章讨论一般的一维可压缩流体流的欧拉方程组. 这个更为一般的系统在真空直线 $\rho = 0$ 上非严格双曲. 应用补偿列紧方法处理这个系统的一个主要困难就是如何构造熵-熵流并且得到关于这些熵的必要估计. 因为文献 [5] 中构造严格双曲系统的 Lax 型熵-熵流的方法在这里失效, 所以该章介绍具有特殊形式的 Lax 熵, 并利用二阶常微分方程的奇异扰动理论成功地得到关于这些熵的必要估计, 然后用 DiPerna 方法来研究这个非严格双曲系统.

第 11 章运用第 10 章中的方法讨论一般弹性力学系统的 L^∞ 熵解.

第 12 章介绍关于弹性力学系统的 $L^p(1 < p < \infty)$ 弱解的一些重要结果, 其中包含分别由 Lin 和 Shearer 给出的关于人工黏性解和物理黏性解的紧性框架, 还讨论后一紧性框架在通过多孔介质的绝热气体流系统中的应用. 然而, 为了避免烦琐的数学公式, 本书没有对这两个紧性框架给予证明. 这两个框架非常重要, 是研究第 16 章中由三个方程组成的双曲系统的松弛问题的基础.

第 13~16 章介绍补偿列紧方法在松弛问题中的应用.

第 13 章介绍松弛奇性问题的一般刻画.

第 14 章证明两个关于一般的带刚性松弛和控制扩散的 2×2 非线性守恒律系统之奇异极限的基本定理, 并且讨论了它们在一些重要的非线性双曲守恒律系统中的应用.

第 15 章介绍关于一般 2×2 双曲守恒律系统的刚性松弛极限的一个框架, 并据此研究了一个推广的交通流模型.

第 16 章介绍一个描述化学反应的 3×3 系统的刚性松弛极限, 并讨论了该系统的一个特殊情形以及 $2n \times 2n$ 色谱学双曲系统的纯松弛极限.

第 2 章　补偿列紧理论

补偿列紧理论是一门庞大的学科. 然而, 直到现在, 它在双曲守恒律中的所有应用都与本章给出的定理有关.

2.1　Young 测度表示定理

定理 2.1.1 (Young 测度表示定理)　设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 为开集, $\boldsymbol{u}^n(\boldsymbol{x}) : \Omega \to \mathbb{R}^S$ 是一列可测函数, 则存在 $\{\boldsymbol{u}^n(\boldsymbol{x})\}$ 的子列 $\{\boldsymbol{u}^{n_k}(\boldsymbol{x})\}$ 和一族正测度 $\nu_{\boldsymbol{x}} \in M(\mathbb{R}^S)$(a.e. $\boldsymbol{x} \in \Omega$) 使得对任意的 $f \in C_0(\mathbb{R}^S)$ 有

$$\text{w}^*\text{-}\lim f(\boldsymbol{u}^{n_k}) = \langle f(\lambda), \nu_{\boldsymbol{x}} \rangle = \int_{\mathbb{R}^S} f(\lambda) \mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{x}}(\lambda), \tag{2.1.1}$$

其中, 函数空间 $C_0(\mathbb{R}^S) = \{f(s) \in C(\mathbb{R}^S) : \lim\limits_{|s| \to \infty} f(s) = 0\}$; $M(\mathbb{R}^S)$ 为其共轭空间; $\text{w}^*\text{-}\lim$ 表示 L^∞ 空间中的弱 $*$ 极限. 进一步, 若 $\boldsymbol{u}^n(\boldsymbol{x})$ 的值域包含在 $G \subset \mathbb{R}^S$, 则 $\operatorname{supp} \nu_{\boldsymbol{x}} \subset G$; 若 $\boldsymbol{u}^n(\boldsymbol{x})$ 的 L^∞ 范数一致有界或者 G 是 $\mathbb{R}^S$ 中的紧集, 则 $\nu_{\boldsymbol{x}}$ 是概率测度, 即 $\nu_{\boldsymbol{x}}$ 的质量为 1.

证明　设 $E = \{f^m\}$ 为 $C_0(\mathbb{R}^S)$ 的一稠密子集, 则 $\{f^1(\boldsymbol{u}^n)\}$ 在 Ω 中有界, 从而存在 $\{\boldsymbol{u}^n\}$ 的一个子列 $\{\boldsymbol{u}^{n_k^1}\}$ 及 $\alpha(f^1)(\boldsymbol{x}) \in L^\infty(\Omega)$ 使得

$$\text{w}^*\text{-}\lim f^1(\boldsymbol{u}^{n_k^1}) = \alpha(f^1)(\boldsymbol{x});$$

而且, $\{f^2(\boldsymbol{u}^{n_k^1})\}$ 也在 Ω 中有界, 因而存在 $\{\boldsymbol{u}^{n_k^1}\}$ 的一个子列 $\{\boldsymbol{u}^{n_k^2}\}$ 及 $\alpha(f^2)(\boldsymbol{x}) \in L^\infty(\Omega)$ 使得

$$\text{w}^*\text{-}\lim f^2(\boldsymbol{u}^{n_k^2}) = \alpha(f^2)(\boldsymbol{x}).$$

这个过程一直进行下去, 我们就得到子列 $\{\boldsymbol{u}^{n_k^m}\}$ 及 $\alpha(f^m)(\boldsymbol{x})$ 使得

(1) $\{\boldsymbol{u}^{n_k^1}\} \supset \{\boldsymbol{u}^{n_k^2}\} \supset \cdots \supset \{\boldsymbol{u}^{n_k^m}\} \supset \cdots$, 并且

(2) 对任意给定的 m, $\text{w}^*\text{-}\lim f^m(\boldsymbol{u}^{n_k^m}) = \alpha(f^m)(\boldsymbol{x})$.

抽取对角线子列, 令 $\{\boldsymbol{u}^{n_k}\} = \{\boldsymbol{u}^{n_k^k}\}$, 则由 (2), 对任意给定的正整数 m 有

$$\text{w}^*\text{-}\lim f^m(\boldsymbol{u}^{n_k}) = \alpha(f^m)(\boldsymbol{x}). \tag{2.1.2}$$

对每个 $f^m \in E$, 定义 $L^1(\Omega)$ 上的有界泛函 $I(f^m)$ 如下:

$$\langle I(f^m), \psi \rangle = \int_\Omega \psi \alpha(f^m) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \lim_{k \to \infty} \int_\Omega \psi f^m(\boldsymbol{u}^{n_k}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \quad \forall \psi \in L^1(\Omega).$$

对任一给定的 $f \in C_0(\mathbb{R}^S)$, 存在 $\{f^l\} \subset E$ 使得 $f = \lim\limits_{l\to\infty} f^l$. 现在证明下述极限存在并把之记为 $I(f)$, 即

$$\langle I(f), \psi\rangle = \lim_{k\to\infty}\int_\Omega \psi f(\boldsymbol{u}^{n_k})\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \quad \forall \psi \in L^1(\Omega). \tag{2.1.3}$$

事实上, 对任意 $\boldsymbol{u}^{n_{k_1}}, \boldsymbol{u}^{n_{k_2}}$ 有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega \psi[f(\boldsymbol{u}^{n_{k_1}}) - f(\boldsymbol{u}^{n_{k_2}})]\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right| \\
\leqslant &\left|\int_\Omega \psi[f(\boldsymbol{u}^{n_{k_1}}) - f^l(\boldsymbol{u}^{n_{k_1}})]\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right| + \left|\int_\Omega \psi[f(\boldsymbol{u}^{n_{k_2}}) - f^l(\boldsymbol{u}^{n_{k_2}})]\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right| \\
&+ \left|\int_\Omega \psi[f^l(\boldsymbol{u}^{n_{k_1}}) - f^l(\boldsymbol{u}^{n_{k_2}})]\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right| \\
\leqslant &\, 2\|f - f^l\|_{C_0}\|\psi\|_{L^1} + \left|\int_\Omega \psi[f^l(\boldsymbol{u}^{n_{k_1}}) - f^l(\boldsymbol{u}^{n_{k_2}})]\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right|.
\end{aligned} \tag{2.1.4}$$

首先选取 l 足够大使得 (2.1.4) 右边的第一项充分小, 而由 (2.1.2), (2.1.4) 右边的第二项也充分小, 只要 n_{k_1} 和 n_{k_2} 足够大. 故对固定的 $\psi \in L^1(\Omega)$, $\left\{\int_\Omega \psi f(\boldsymbol{u}^{n_k})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right\}$ 是柯西列, 即 (2.1.3) 成立. 因此

$$|\langle I(f), \psi\rangle| \leqslant \|f\|_{C_0}\|\psi\|_{L^1}, \quad \forall \psi \in L^1(\Omega). \tag{2.1.5}$$

这说明 $I(f)$ 是 $L^1(\Omega)$ 上的有界线性泛函, 因而由 Riesz 表示定理, 存在 $\alpha(f)(x) \in L^\infty(\Omega)$ 使得

$$\langle I(f), \psi\rangle = \int_\Omega \alpha(f)\psi\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \quad \forall \psi \in L^1(\Omega). \tag{2.1.6}$$

此外,

$$\begin{aligned}
\alpha(f_1 + f_2) &= \alpha(f_1) + \alpha(f_2), \quad \forall f_i \in C_0(\mathbb{R}^S)\ (i = 1, 2), \\
\alpha(kf) &= k\alpha(f), \quad \forall f \in C_0(\mathbb{R}^S), \quad k \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

不失一般性, 假设 $\boldsymbol{x} \in \Omega$ 都是函数 $\alpha(f)$ 的勒贝格点, 则对任意给定的 $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$, 令

$$\psi(x) = (\operatorname{meas} B_r(\boldsymbol{x}_0))^{-1}\chi_{B_r(\boldsymbol{x}_0)},$$

其中, $B_r(\boldsymbol{x}_0)$ 是以 $\boldsymbol{x}_0$ 为中心 r 为半径的球; $\chi_{B_r(\boldsymbol{x}_0)}$ 是 $B_r(\boldsymbol{x}_0)$ 的特征函数. 于是由 (2.1.5)–(2.1.6), 有

$$\left|(\operatorname{meas} B_r(\boldsymbol{x}_0))^{-1}\int_{B_r(\boldsymbol{x}_0)} \alpha(f)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right| \leqslant \|f\|_{C_0}.$$

令 $r \to 0$ 即得 $|\alpha(f)(\boldsymbol{x}_0)| \leqslant \|f\|_{C_0}$. 又因 $\alpha(f)$ 关于 f 线性, 故 $\alpha(f)(\boldsymbol{x}_0)$ 是 $C_0(\mathbb{R}^S)$ 上的有界线性泛函. 因此根据 Riesz 表示定理, 存在 $\nu_{\boldsymbol{x}_0} \in M(\mathbb{R}^S)$ 使得

$$\alpha(f)(\boldsymbol{x}_0) = \langle f(\lambda), \nu_{\boldsymbol{x}_0}\rangle = \int_{\mathbb{R}^S} f(\lambda)\mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{x}_0}.$$

再由 $\boldsymbol{x}_0$ 的任意性得

$$\langle I(f), \psi\rangle = \int_\Omega \psi\langle f(\lambda), \nu_{\boldsymbol{x}}\rangle \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \quad \forall \psi \in L^1(\Omega),$$

其中, $\nu_{\boldsymbol{x}} \in M(\mathbb{R}^S)$ (a.e. $\boldsymbol{x} \in \Omega$). 至此等式 (2.1.1) 获得了证明.

注意到对任意正函数 $f \in C_0(\mathbb{R}^S)$ 有

$$\alpha(f)(\boldsymbol{x}) = \langle f(\lambda), \nu_{\boldsymbol{x}}\rangle \geqslant 0 \quad (\text{a.e. } \boldsymbol{x} \in \Omega),$$

这表明 $\nu_{\boldsymbol{x}}$(a.e. $\boldsymbol{x} \in \Omega$) 是正测度.

若 $\boldsymbol{u}^n(\boldsymbol{x})$ 的值域包含在 $G \subset \mathbb{R}^S$ 中, 可选取 $f \in C_0(\mathbb{R}^S)$ 满足 $\operatorname{supp} f \subset \mathbb{R}^S - \{G\}$, 则显然有

$$0 = \mathrm{w}^*\text{-}\lim f(\boldsymbol{u}^{n_k}) = \int_{\mathbb{R}^S} f(\lambda)\mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{x}}(\lambda),$$

这表明 $\operatorname{supp} \nu \subset G$.

最后, 若 $\boldsymbol{u}^n(\boldsymbol{x})$ 的 L^∞ 范数一致有界或 G 是 $\mathbb{R}^S$ 中的紧集, 令 $f \equiv 1$, 则由 (2.1.1) 得 $\int_G \mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{x}}(\lambda) = 1$. 所以 $\nu_{\boldsymbol{x}}$ 的质量为 1, 即 $\nu_{\boldsymbol{x}}$ 是概率测度. 证毕. □

推论 2.1.1 *如果可测函数列 $\{\boldsymbol{u}^n(\boldsymbol{x})\}$ 在 $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^S)$ $(1 < p < \infty)$ 中一致有界, 那么存在 $\{\boldsymbol{u}^n(\boldsymbol{x})\}$ 的子列 $\{\boldsymbol{u}^{n_k}(\boldsymbol{x})\}$ 和一族正测度 $\nu_{\boldsymbol{x}} \in M(\mathbb{R}^S)$ (a.e. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$) 使得对任意有界可测集 $A \subset \mathbb{R}^N$ 有*

$$\mathrm{w}\text{-}\lim f(\boldsymbol{u}^{n_k}) = \langle f(\lambda), \nu_{\boldsymbol{x}}\rangle = \int_{\mathbb{R}^S} f(\lambda)\mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{x}}(\lambda), \tag{2.1.7}$$

其中, w-lim 表示 $L^1(A)$ 中的弱极限, 函数 $f \in C(\mathbb{R}^S)$ 满足

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \frac{f(\lambda)}{|\lambda|^p} = 0. \tag{2.1.8}$$

证明　不失一般性设 $f \geqslant 0$. 令 $f^m = \theta^m f \in C_0(\mathbb{R}^S)$, 其中 $\theta^m \in C_0(\mathbb{R}^S)$ 定义如下:

$$\theta^m(\lambda) \quad \begin{cases} 1, & |\lambda| \leqslant m, \\ 1 + m - |\lambda|, & m \leqslant |\lambda| \leqslant m + 1, \\ 0, & |\lambda| \geqslant m + 1. \end{cases}$$

因为对任意 $\phi \in L^\infty(A)$ 有

$$\left|\int_A \phi[f^m(\boldsymbol{u}^n) - f(\boldsymbol{u}^n)]\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right| \leqslant \|\phi\|_{L^\infty(A)} \int_{\{\boldsymbol{x}\in A: |\boldsymbol{u}^n| \geqslant m\}} f(\boldsymbol{u}^n(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$
$$\leqslant \|\phi\|_{L^\infty(A)} \|\boldsymbol{u}^n\|^p_{L^p(A)} \max_{|\lambda|\geqslant m} \frac{f(\lambda)}{|\lambda|^p},$$

所以由式 (2.1.8) 知

$$\lim_{m\to\infty} \int_A \phi f^m(\boldsymbol{u}^n)\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_A \phi f(\boldsymbol{u}^n)\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \quad \phi \in L^\infty(A) \tag{2.1.9}$$

关于 n 一致成立.

另一方面, 根据定理 2.1.1, 存在 $\{\boldsymbol{u}^n(\boldsymbol{x})\}$ 的子列 $\{\boldsymbol{u}^{n_k}(\boldsymbol{x})\}$ 和一族正测度 $\nu_{\boldsymbol{x}} \in M(\mathbb{R}^S)$ 使得对任何 $m \in \mathbb{N}$ 有

$$\lim_{k\to\infty} \int_A \phi f^m(\boldsymbol{u}^{n_k})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_A \phi\langle f^m(\lambda), \nu_{\boldsymbol{x}}\rangle\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \quad \forall \phi \in L^\infty(A). \tag{2.1.10}$$

又由 Levi 单调收敛定理得

$$\lim_{m\to\infty} \int_A \phi\langle f^m(\lambda), \nu_{\boldsymbol{x}}\rangle\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_A \phi\langle f(\lambda), \nu_{\boldsymbol{x}}\rangle\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{2.1.11}$$

结合式 (2.1.9)~(2.1.11) 即得等式 (2.1.7). 证毕. □

定理 2.1.2 *若对几乎所有的 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$ 有推论 2.1.1 中 $\nu_{\boldsymbol{x}}$ 的支集是独点集, 则存在子列 $\{\boldsymbol{u}^{\varepsilon_k}\}$ 在 $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ 中强收敛于 $\boldsymbol{u}$; 并且, $\nu_{\boldsymbol{x}} = \delta_{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})}$.*

证明 因为 $\nu_{\boldsymbol{x}}$ 的支集只含一个点, 所以存在函数 $v(\boldsymbol{x})$ 使 $\nu_{\boldsymbol{x}} = \delta_{v(\boldsymbol{x})}$ (a.e. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$). 由于 $1 < p < \infty$, 因而可以在推论 2.1.1 中依次令 $f(\lambda) = \lambda_i, i = 1, 2, \cdots, S$ 得到

$$u_i^{n_k} = f(\boldsymbol{u}^{n_k}) \rightharpoonup \langle f(\lambda), \nu_{\boldsymbol{x}}\rangle = \langle \lambda_i, \nu_{\boldsymbol{x}}\rangle = v_i.$$

由弱极限的唯一性, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$.

对 $1 < q < p$ 定义 $f_i(\lambda) = |\lambda_i|^q$, $i = 1, 2, \cdots, S$, 则由推论 2.1.1, 对任意紧集 $K \subset \mathbb{R}^N$ 有

$$\int_K |u_i^{n_k}|^q\mathrm{d}\boldsymbol{x} \to \int_K \int_{\mathbb{R}^S} f_i(\lambda)\mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{x}}(\lambda)\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$
$$= \int_K |u_i^{n_k}|^q\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

这说明 $\|\boldsymbol{u}^{n_k}(\boldsymbol{x})\|_{L^q(K)} \to \|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\|_{L^q(K)}$. 因为 $L^q(K)$ $(q > 1)$ 是一致凸的 Banach 空间, 所以由 Radon 定理, $\{\boldsymbol{u}^{n_k}(\boldsymbol{x})\}$ 在 $L^q(K)$ $(1 \leqslant q < p)$ 中强收敛. 故由 K 的任意性, $\{\boldsymbol{u}^{n_k}\}$ 在 $L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)(1 \leqslant q < p)$ 中强收敛于 $\boldsymbol{u}$. □

注意到 $L^\infty(\mathbb{R}^N) \subset L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, 我们易得下述推论.

推论 2.1.2　*若定理 2.1.1 中 $\{u^n(x)\}$ 的 L^∞ 范数一致有界且 ν_x 的支集只含一个点, 则 $\{u^{n_k}\}$ 几乎处处收敛于 u; 并且 $\nu_x = \delta_{u(x)}$.*

2.2　二阶行列式的弱连续性定理

定理 2.2.1　*设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是有界开集, $H^{-1}(\Omega)$ 为 $H_0^1(\Omega)$ 的对偶空间. 假设*

(H_1) 在 $L^2(\Omega)$ 中, $u^\varepsilon = (u_1^\varepsilon, \cdots, u_p^\varepsilon) \rightharpoonup u = (u_1, \cdots, u_p)$;

(H_2) $\displaystyle\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{N} a_{ijk}\frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_k}$ $(i = 1, 2, \cdots, q)$ 在 H_{loc}^{-1} 中紧.

若二次型 $Q = Q(\lambda)$ $(\lambda \in \mathbb{R}^p)$ 满足 $Q|_\wedge(\lambda) \geqslant 0$, 其中

$$\wedge = \left\{\lambda \in \mathbb{R}^p : \exists \xi \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}\ \text{使得}\ \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{N} a_{ijk}\lambda_j\xi_k = 0,\ i = 1, 2, \cdots, q\right\}, \tag{2.2.1}$$

且在分布意义下 $Q(u^\varepsilon) \rightharpoonup l$ (l 可能为一测度), 则

$$l \geqslant Q(u). \tag{2.2.2}$$

在分布意义下成立

证明　把证明分为四步.

1° 作变换 $v_i^\varepsilon = u_i^\varepsilon - u_i$, 则 (H_1) 和 (H_2) 等价于

(1) 在 $L^2(\Omega)$ 中, $v_j^\varepsilon \rightharpoonup 0$ $(j = 1, 2, \cdots, p)$;

(2) $\displaystyle\sum_{j,k} a_{ijk}\frac{\partial v_j^\varepsilon}{\partial x_k}$ $(i = 1, 2, \cdots, q)$ 在 H_{loc}^{-1} 中紧.

因为 Q 是二次型, 所以存在双线性函数 $q(a, b)$ 使得 $Q(a) = q(a, a)$, 因而

$$Q(v^\varepsilon) = Q(u^\varepsilon - u) = Q(u^\varepsilon) - 2q(u^\varepsilon, u) + Q(u).$$

由于当 b 固定时, $q(a, b)$ 关于 a 线性, 所以 $q(u^\varepsilon, u) \rightharpoonup q(u, u) = Q(u)$. 因此由 $Q(u^\varepsilon) \rightharpoonup l$ 得

$$Q(v^\varepsilon) \rightharpoonup l - Q(u).$$

2° 令 $w^\varepsilon = \phi v^\varepsilon$, $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, 则 $\mathrm{supp}\ w^\varepsilon$ 为 $\mathbb{R}^N$ 中的紧集, 且

$$\text{在 } L^2(\Omega) \text{ 中},\quad w^\varepsilon \rightharpoonup 0. \tag{2.2.3}$$

由于

$$\sum_{j,k} a_{ijk}\frac{\partial w_j^\varepsilon}{\partial x_k} = \phi\sum_{j,k} a_{ijk}\frac{\partial v_j^\varepsilon}{\partial x_k} + \sum_{j,k} a_{ijk}v_j^\varepsilon\frac{\partial \phi}{\partial x_k}, \tag{2.2.4}$$

且上式右端的第一项在 $H^{-1}(\Omega)$ 中紧, 所以

$$\sum_{j,k} a_{ijk}\frac{\partial w_j^\varepsilon}{\partial x_k} \text{ 按 } H^{-1}(\Omega) \text{ 中的强拓扑紧.}$$

于是可选取其子列使得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{j,k} a_{ijk}\frac{\partial w_j^\varepsilon}{\partial x_k} = 0 \quad (\text{按 } H^{-1}(\Omega) \text{ 中的强拓扑}), \tag{2.2.5}$$

$$Q(w^\varepsilon) \rightharpoonup \phi^2[l - Q(u)].$$

3° 为了证得 (2.2.2), 只需证明

$$\varliminf_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega Q(w^\varepsilon)\mathrm{d}x \geqslant 0, \tag{2.2.6}$$

这是因为

$$\varliminf_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega Q(\phi v^\varepsilon)\mathrm{d}x \geqslant 0 \Leftrightarrow \int_\Omega \phi^2[l - Q(u)]\mathrm{d}x \geqslant 0$$

对所有的 $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ 成立, 这蕴涵着 $l - Q(u) \geqslant 0$.

4° 定义 w_j^ε 的 Fourier 变换

$$\widehat{w_j^\varepsilon} = F(w_j^\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}^N} w_j^\varepsilon(x)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}(\xi\cdot x)}\mathrm{d}x. \tag{2.2.7}$$

现在按 Hermitian 形式把 Q 从 $\mathbb{R}^p$ 延拓到 $\mathbb{C}^p$. 由于 Q 是二次型, 所以可设

$$Q(\lambda) = \sum_{j,k} q_{jk}\lambda_j\lambda_k,$$

其中, $q_{jk} = q_{kj}$ 为实系数. 定义

$$\widetilde{Q}(\lambda) = \sum_{j,k} q_{jk}\lambda_j\overline{\lambda_k}.$$

我们断言

$$\mathrm{Re}\ (\widetilde{Q}(\lambda)) \geqslant 0, \quad \forall\, \lambda \in \wedge + \mathrm{i}\wedge. \tag{2.2.8}$$

事实上, 若 $\lambda = \lambda_1 + \mathrm{i}\lambda_2$ ($\lambda_1,\ \lambda_2 \in \wedge$), 则

$$\widetilde{Q}(\lambda) = [Q(\lambda_1) + Q(\lambda_2)] + \mathrm{i}[q(\lambda_1,\lambda_2) - q(\lambda_2,\lambda_1)].$$

这蕴涵着 (2.2.8).

应用 Plancherel 恒等式

$$\int_{\mathbb{R}^N} v(\boldsymbol{x})\bar{w}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{v}(\boldsymbol{\xi})\bar{\widehat{w}}(\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi},$$

其中, $v,\ w \in L^2(\mathbb{R}^N)$ 为复值函数, 有

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(\boldsymbol{w}^\varepsilon)\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{Q}(\widehat{\boldsymbol{w}^\varepsilon})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} = \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{Re}\ \widetilde{Q}(\widehat{\boldsymbol{w}^\varepsilon})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}.$$

所以式 (2.2.6) 等价于

$$\varliminf_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{Re}\ \widetilde{Q}(\widehat{\boldsymbol{w}^\varepsilon})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \geqslant 0. \tag{2.2.9}$$

因为 $\mathrm{supp}\, w_j^\varepsilon$ 包含于紧集 $S = \mathrm{supp}\,\phi$, 所以由式 (2.2.7) 得

$$\widehat{w_j^\varepsilon}(\boldsymbol{\xi}) = \int_S w_j^\varepsilon(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x})}\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

于是由 $\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x})} \in L^2(S)$ 及 (2.2.3) 可推出

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\widehat{w_j^\varepsilon}(\boldsymbol{\xi}) = 0 \quad (\forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^N), \text{ 且 } \|\widehat{w_j^\varepsilon}(\boldsymbol{\xi})\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leqslant M. \tag{2.2.10}$$

因此 $\widehat{w_j^\varepsilon}$ 在 $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ 中强收敛于 0, 从而

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|\boldsymbol{\xi}|\leqslant r} \widetilde{Q}(\widehat{\boldsymbol{w}^\varepsilon})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} = 0, \quad \forall r > 0. \tag{2.2.11}$$

对 (2.2.5) 作 Fourier 变换有

$$\frac{1}{1+|\boldsymbol{\xi}|}\sum_{j,k} a_{ijk}\widehat{w_j^\varepsilon}(\boldsymbol{\xi})\xi_k \text{ 在 } L^2(\mathbb{R}^N) \text{ 中强收敛于 } 0, \quad i = 1, 2, \cdots, q. \tag{2.2.12}$$

利用下述引理即可完成定理 2.2.1 的证明.

引理 2.2.1　*若对任意的 $\lambda \in \wedge$ 有 $Q(\lambda) \geqslant 0$, 则任给 $\alpha > 0$, 存在常数 $C_\alpha > 0$ 使得*

$$\mathrm{Re}\ \widetilde{Q}(\lambda) \geqslant -\alpha|\lambda|^2 - C_\alpha\sum_{i=1}^{q}\left|\sum_{j,k} a_{ijk}\lambda_j\eta_k\right|^2$$

对任意 $\lambda \in \mathbb{C}^p$ 及 $|\eta| = 1$ 的 $\eta \in \mathbb{R}^N$ 成立.

事实上, 由结论 (2.2.12) 知 $\dfrac{1}{|\boldsymbol{\xi}|}\displaystyle\sum_{j,k} a_{ijk}\widehat{w_j^\varepsilon}(\boldsymbol{\xi})\xi_k$ 在 $L^2(\{|\boldsymbol{\xi}| \geqslant 1\})$ 中强收敛, 且

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|}\sum_{j,k} a_{ijk}\widehat{w_j^\varepsilon}(\boldsymbol{\xi})\xi_k = 0. \tag{2.2.13}$$

在引理 2.2.1 中, 取 $\lambda = \widehat{\boldsymbol{w}^\varepsilon}(\boldsymbol{\xi})$, $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}/|\boldsymbol{\xi}|$, 则

$$\operatorname{Re}\widetilde{Q}(\widehat{w^{\varepsilon}}(\boldsymbol{\xi}))\geqslant-\alpha|\widehat{w^{\varepsilon}}(\boldsymbol{\xi})|^{2}-C_{\alpha}\sum_{i=1}^{q}\left|\sum_{j,k}a_{ijk}\widehat{w_{j}^{\varepsilon}}(\boldsymbol{\xi})\xi_{k}/|\boldsymbol{\xi}|\right|^{2},$$

从而在 $|\boldsymbol{\xi}|\geqslant 1$ 上积分得

$$\int_{|\boldsymbol{\xi}|\geqslant 1}\operatorname{Re}\widetilde{Q}(\widehat{w^{\varepsilon}}(\boldsymbol{\xi}))\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\geqslant-\alpha\int_{|\boldsymbol{\xi}|\geqslant 1}|\widehat{w^{\varepsilon}}(\boldsymbol{\xi})|^{2}\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$$
$$-C_{\alpha}\int_{|\boldsymbol{\xi}|\geqslant 1}\sum_{i=1}^{q}\left|\sum_{j,k}a_{ijk}\widehat{w_{j}^{\varepsilon}}(\boldsymbol{\xi})\xi_{k}/|\boldsymbol{\xi}|\right|^{2}\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}.$$

于是由式 (2.2.10) 及 (2.2.13) 可推出

$$\varliminf_{\varepsilon\to 0}\int_{|\boldsymbol{\xi}|\geqslant 1}\operatorname{Re}\widetilde{Q}(\widehat{w^{\varepsilon}}(\boldsymbol{\xi}))\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\geqslant-\alpha M$$

对充分小的 $\alpha>0$ 成立. 因此

$$\varliminf_{\varepsilon\to 0}\int_{|\boldsymbol{\xi}|\geqslant 1}\operatorname{Re}\widetilde{Q}(\widehat{w^{\varepsilon}}(\boldsymbol{\xi}))\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\geqslant 0.$$

这与 (2.2.11) 相结合即得 (2.2.9), 从而得到不等式 (2.2.6). 证毕. □

引理 2.2.1 的证明 用反证法. 假设存在 $\alpha>0$ 满足: 对任何 $C_{\alpha}=n$, 存在 $\boldsymbol{\lambda}^{n}|=1$ 的 $\boldsymbol{\lambda}^{n}\in\mathbb{C}^{p}$ 及 $|\boldsymbol{\eta}^{n}|=1$ 的 $\boldsymbol{\eta}^{n}\in\mathbb{R}^{N}$ 使得

$$\operatorname{Re}\widetilde{Q}(\boldsymbol{\lambda}^{n})<-\alpha|\boldsymbol{\lambda}^{n}|^{2}-n\sum_{i=1}^{q}\left|\sum_{j,k}a_{ijk}\lambda_{j}^{n}\eta_{k}^{n}\right|^{2}. \tag{2.2.14}$$

选取子列 $\{\boldsymbol{\lambda}^{n}\}$, $\{\boldsymbol{\eta}^{n}\}$ 使得 $\boldsymbol{\lambda}^{n}\to\boldsymbol{\lambda}^{\infty}$, $\boldsymbol{\eta}^{n}\to\boldsymbol{\eta}^{\infty}$, 则由式 (2.2.14) 得

$$\sum_{i=1}^{q}\left|\sum_{j,k}a_{ijk}\lambda_{j}^{n}\eta_{k}^{n}\right|^{2}\leqslant\frac{C}{n},$$

其中, $C>0$ 为常数. 于是令 $n\to\infty$ 即得

$$\sum_{j,k}a_{ijk}\lambda_{j}^{\infty}\eta_{k}^{\infty}=0,\quad i=1,2,\cdots,q.$$

因此 $\boldsymbol{\lambda}^{\infty}\in\wedge+\mathrm{i}\wedge$, 从而由式 (2.2.8) 得 $\operatorname{Re}\widetilde{Q}(\boldsymbol{\lambda}^{\infty})\geqslant 0$. 然而由式 (2.2.14) 可直接得到

$$\operatorname{Re}\widetilde{Q}(\boldsymbol{\lambda}^{\infty})=\lim_{n\to\infty}\operatorname{Re}\widetilde{Q}(\boldsymbol{\lambda}^{n})\leqslant-\alpha<0.$$

这不可能. 证毕. □

推论 2.2.1　*设二次型 Q 满足 $Q|_\wedge(\boldsymbol{\lambda})=0$, $\{\boldsymbol{u}^\varepsilon\}$ 满足 (H_1) 和 (H_2). 若在分布意义下 $Q(\boldsymbol{u}^\varepsilon)\rightharpoonup l$ (l 可能为一测度), 则 $l=Q(\boldsymbol{u})$.*

证明　一方面由定理 2.2.1 得 $l\geqslant Q(\boldsymbol{u})$; 另一方面由 $-Q$ 取代 Q 即得 $-l\geqslant -Q(\boldsymbol{u})$, 所以 $l=Q(\boldsymbol{u})$. □

定理 2.2.2 (二阶行列式的弱连续性定理)　*设 $\Omega\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ 为有界开集, $\boldsymbol{u}^\varepsilon:\Omega\to\mathbb{R}^4$ 为可测函数. 如果 $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ 在 $L^2(\Omega;\mathbb{R}^4)$ 中弱收敛于 $\boldsymbol{u}$, 并且*

$$\frac{\partial u_1^\varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial u_2^\varepsilon}{\partial x},\ \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial u_4^\varepsilon}{\partial x}\ \text{在}\ H^{-1}(\Omega)\ \text{中紧}, \tag{2.2.15}$$

那么在分布意义下,

$$\begin{vmatrix} u_1^\varepsilon & u_2^\varepsilon \\ u_3^\varepsilon & u_4^\varepsilon \end{vmatrix}\rightharpoonup\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{vmatrix}. \tag{2.2.16}$$

证明　由条件 (2.2.15), 相应于由式 (2.2.1) 定义的集合 $\wedge$ 中的任何点 $\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}^4$ 应具有性质:

$$\text{存在}\ \boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\backslash\{0\}\ \text{使得}\ \lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2=0,\ \lambda_3\xi_1+\lambda_4\xi_2=0,$$

即

$$\wedge=\{\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}^4:\lambda_1\lambda_4-\lambda_2\lambda_3=0\}.$$

令 $Q(\boldsymbol{\lambda})=\lambda_1\lambda_4-\lambda_2\lambda_3$, 则显然有 $Q(\boldsymbol{\lambda})=0$ 对任何 $\boldsymbol{\lambda}\in\wedge$ 成立. 因此由推论 2.2.1 即得式 (2.2.16). 证毕. □

2.3　嵌 入 定 理

本节主要介绍一个紧嵌入定理, 它源于 Murat 引理或专著 [6] 中的一个插值不等式.

首先不加证明地叙述一个引理.

引理 2.3.1　*设 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 为有界开集, $\boldsymbol{f}\in W^{-1,p}(\Omega)$ $(1<p<\infty)$, $\operatorname{supp}\boldsymbol{f}\subset\subset\Omega$. 若 $\boldsymbol{u}$ 是边值问题*

$$\begin{cases} -\Delta\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}, & \boldsymbol{x}\in\Omega,\\ \boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}, & \boldsymbol{x}\in\partial\Omega \end{cases}$$

的解, 则

$$\|\boldsymbol{u}\|_{W^{1,p}(\Omega)}\leqslant C\|\boldsymbol{f}\|_{W^{-1,p}(\Omega)},$$

其中, $C>0$ 是与 $\boldsymbol{f}$ 无关的常数.

这个引理可应用椭圆型方程的 L^p 理论得到证明, 请参阅文献 [7].

定理 2.3.1 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 为有界开集, C 为 $W_{\rm loc}^{-1,q}(\Omega)$ 中的紧集, B 在 $W_{\rm loc}^{-1,r}(\Omega)$ 中有界, 其中常数 q, p, r 满足 $1<q\leqslant p<r<\infty$. 如果 $D\subset\mathcal{D}(\Omega)$ 为 $C\cap B$ 的子集, 那么存在 $W_{\rm loc}^{-1,p}(\Omega)$ 中的紧集 E 使得 $D\subset E$.

证明 设函数列 $\{f_k\}\subset D\subset C\cap B$, 则存在其子列 $\{f_k\}$ 使得

$$\|f_i\|_{W_{\rm loc}^{-1,r}(\Omega)}\leqslant M,\quad \|f_i-f_j\|_{W_{\rm loc}^{-1,q}(\Omega)}\to 0\quad (i,j\to\infty),\tag{2.3.1}$$

其中, 常数 $M>0$ 与 i 无关.

对任意 $\Omega_1\subset\subset\Omega$, 选取 $\phi\in C_c^\infty(\Omega)$ 使得 $\phi|_{\Omega_1}\equiv 1$, 并定义 $\bar f_i\equiv\phi f_i$, 则 $\bar f_i$ 满足 $\operatorname{supp}\bar f_i\subset\subset\Omega$ 且 $\bar f_i|_{\Omega_1}=f_i|_{\Omega_1}$.

现在令 u_i 为边值问题

$$\begin{cases}-\Delta u_i=\bar f_i, & x\in\Omega,\\ u_i=0, & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

的解, 则

$$\|u_i\|_{W^{1,q}(\Omega)}\leqslant C\|\bar f_i\|_{W^{-1,q}(\Omega)},\quad \|u_i\|_{W^{1,r}(\Omega)}\leqslant C\|\bar f_i\|_{W^{-1,r}(\Omega)}.\tag{2.3.2}$$

由 (2.3.1), (2.3.2) 得

$$\begin{aligned}\|u_i-u_j\|_{W^{1,q}(\Omega)}&\leqslant C\|\bar f_i-\bar f_j\|_{W^{-1,q}(\Omega)}\\&\leqslant C\|f_i-f_j\|_{W_{\rm loc}^{-1,q}(\Omega)}\to 0\quad (i,j\to\infty).\end{aligned}$$

对 u_i-u_j 应用插值不等式

$$\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}\leqslant\|v\|_{W^{1,r}(\Omega)}^{1-\alpha}\cdot\|v\|_{W^{1,q}(\Omega)}^{\alpha},$$

其中, $\alpha\in(0,1]$ 满足 $\dfrac1p=\dfrac{1-\alpha}{r}+\dfrac{\alpha}{q}$, 有

$$\begin{aligned}\|u_i-u_j\|_{W^{1,p}(\Omega)}&\leqslant\|u_i-u_j\|_{W^{1,r}(\Omega)}^{1-\alpha}\cdot\|u_i-u_j\|_{W_{\rm loc}^{1,q}(\Omega)}^{\alpha}\\&\leqslant C_1\|u_i-u_j\|_{W_{\rm loc}^{1,q}(\Omega)}^{\alpha}\to 0\quad (i,j\to\infty).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&\|f_i-f_j\|_{W^{-1,p}(\Omega_1)}\\&=\sup\{|\langle f_i-f_j,\phi\rangle|:\|\phi\|_{W_0^{1,p'}(\Omega)}\leqslant 1,\ \operatorname{supp}\phi\subset\Omega_1\}\\&\leqslant\sup\{|\langle\bar f_i-\bar f_j,\phi\rangle|:\|\phi\|_{W_0^{1,p'}(\Omega)}\leqslant 1\}\\&=\|\bar f_i-\bar f_j\|_{W^{-1,p}(\Omega)}\\&=\|\Delta u_i-\Delta u_j\|_{W^{-1,p}(\Omega)}\\&\leqslant\|u_i-u_j\|_{W^{1,p}(\Omega_1)}\to 0\quad (i,j\to\infty),\end{aligned}$$

其中, p' 为 p 的共轭指数, 即 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$. 这表明 D 是 $W^{-1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 中的紧集. 证毕.□

引理 2.3.2　*设 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 为带 Lipschitz 边界 $\partial\Omega$ 的有界区域, 则任给充分小的 $\eta>0$ 及常数 $1<p'<q'<\infty$, 存在 $\psi^\eta\in\mathcal{D}(\Omega)$ 使得*

$$\|(1-\psi^\eta)\varphi\|_{W_0^{1,p'}(\Omega)}\leqslant\eta\|\varphi\|_{W_0^{1,q'}(\Omega)},\quad\forall\varphi\in W_0^{1,q'}(\Omega)\tag{2.3.3}$$

证明　我们分四步证之.

(1) 单位划分. 因为 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 为带 Lipschitz 边界 $\partial\Omega$ 的有界区域, 所以存在 $\bar\Omega$ 的开覆盖 $\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_m$ 使得

$$\beta_0\cap\partial\Omega=\varnothing,\quad\beta_j\cap\partial\Omega\neq\varnothing\ (1\leqslant j\leqslant m),$$

且对 $1\leqslant j\leqslant m$, 存在开球 $B_j\subset\mathbb{R}^N$ 及双 Lipschitz 映射 $T_j:\ \beta_j\to B_j$ 使得 $B_j\cap\mathbb{R}^N_+=T_j(\beta_j\cap\Omega)$.

记 $\alpha_j=\beta_j\cap\Omega,\ A_j=B_j\cap\mathbb{R}^N_+,\ 1\leqslant j\leqslant m$. 设 $\Phi_0,\cdots,\Phi_m$ 为从属于开覆盖 $\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_m$ 的单位划分, 即

$$\Phi_i\in\mathcal{D}(\beta_i),\quad\Phi_i\geqslant0,\quad0\leqslant i\leqslant m,\quad\sum_{i=0}^m\Phi_i=1\ (x\in\bar\Omega).$$

(2) 构造函数 $\bar\psi^\eta$ 使得 $\operatorname{supp}\bar\psi^\eta\subset\subset\Omega$.

对任意 $j\ (1\leqslant j\leqslant m)$ 及足够小的 $\bar\eta>0$, 定义 A_j 上的函数 θ_j^η 如下

$$\theta_j^\eta=\begin{cases}0, & 0\leqslant x_N<\bar\eta/2,\\ \dfrac{1}{\bar\eta}\left(x_N-\dfrac{\bar\eta}{2}\right), & \bar\eta/2\leqslant x_N<\bar\eta,\\ 1, & \bar\eta\leqslant x_N.\end{cases}$$

令

$$\bar\psi^\eta=\Phi_0+\sum_{j=1}^m(\theta_j^\eta\circ T_j)\Phi_j,$$

则 $\bar\psi^\eta$ Lipschitz 连续且 $\operatorname{supp}\bar\psi^\eta\subset\subset\Omega$.

(3) 我们断言: 任给 $\bar\eta>0$, 存在函数 $\psi^\eta\in\mathcal{D}(\Omega)$ 及只依赖于 N 的常数 C_N 使得对任何 $\varphi\in W_0^{1,q'}(\Omega)$ 与 $1<p'<q'<+\infty$ 有

$$\|(\psi^\eta-\bar\psi^\eta)\varphi\|_{W_0^{1,p'}(\Omega)}\leqslant C_N\bar\eta\|\varphi\|_{W_0^{1,q'}(\Omega)}.\tag{2.3.4}$$

设 s 由等式 $\dfrac{1}{q'}+\dfrac{1}{s}=\dfrac{1}{p'}$ 确定, 则 $p'<s<+\infty$. 任给 $\eta>0$, 存在函数

$\psi^\eta \in \mathcal{D}(\Omega)$ 使得

$$\|\psi^\eta - \bar{\psi}^\eta\|_{W_0^{1,s}(\Omega)} \leqslant \bar{\eta}. \tag{2.3.5}$$

根据 Hölder 不等式, 对任何 $\varphi \in W_0^{1,q'}(\Omega)$ 有

$$\|(\psi^\eta - \bar{\psi}^\eta)\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)} \leqslant \|\psi^\eta - \bar{\psi}^\eta\|_{L^s(\Omega)} \|\varphi\|_{L^{q'}(\Omega)},$$

$$\left\|(\psi^\eta - \bar{\psi}^\eta)\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right\|_{L^{p'}(\Omega)} \leqslant \|\psi^\eta - \bar{\psi}^\eta\|_{L^s(\Omega)} \|\varphi\|_{W_0^{1,q'}(\Omega)}, \quad k = 1, 2, \cdots, N,$$

$$\left\|\frac{\partial(\psi^\eta - \bar{\psi}^\eta)}{\partial x_k}\varphi\right\|_{L^{p'}(\Omega)} \leqslant \|\psi^\eta - \bar{\psi}^\eta\|_{W_0^{1,s}(\Omega)} \|\varphi\|_{L^{q'}(\Omega)}, \quad k = 1, 2, \cdots, N.$$

于是对任何 $\varphi \in W_0^{1,q'}(\Omega)$ 有

$$\begin{aligned}
&\|(\psi^\eta - \bar{\psi}^\eta)\varphi\|_{W_0^{1,p'}(\Omega)} \\
\leqslant\ & \tilde{C}_N \Bigg(\|(\psi^\eta - \bar{\psi}^\eta)\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)} + \sum_{k=1}^N \left\|(\psi^\eta - \bar{\psi}^\eta)\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right\|_{L^{p'}(\Omega)} \\
&+ \sum_{k=1}^N \left\|\frac{\partial(\psi^\eta - \bar{\psi}^\eta)}{\partial x_k}\varphi\right\|_{L^{p'}(\Omega)} \Bigg) \\
\leqslant\ & (2N+1)\tilde{C}_N \|\psi^\eta - \bar{\psi}^\eta\|_{W_0^{1,s}(\Omega)} \|\varphi\|_{W_0^{1,q'}(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

由式 (2.3.5), (2.3.6) 即得式 (2.3.4).

(4) 证明：任给 $\bar{\eta} > 0$, 存在常数 $C_\Omega > 0$ 使得对任何 $\varphi \in W_0^{1,q'}(\Omega)$ 有

$$\|(1 - \bar{\psi}^\eta)\varphi\|_{W_0^{1,p'}(\Omega)} \leqslant C_\Omega \bar{\eta}^{1/s} \|\varphi\|_{W_0^{1,q'}(\Omega)}. \tag{2.3.7}$$

由于 $1 - \psi^\eta = \sum_{j=1}^m (1 - \theta_j^\eta \circ T_j)\Phi_j$, 所以只需证明对任意 $1 \leqslant j \leqslant m$, 存在常数 $C > 0$ 使得对任何 $\varphi \in W_0^{1,q'}(\Omega)$ 有

$$\|(1 - \theta_j^\eta \circ T_j)\Phi_j \varphi\|_{W_0^{1,p'}} \leqslant C\bar{\eta}^{1/s} \|\varphi\|_{W_0^{1,q'}(\Omega)}. \tag{2.3.8}$$

为简单起见, 略去下标 j. 对任何 $\varphi \in W_0^{1,q'}(\Omega)$ 有

$$\begin{aligned}
&\|(1 - \theta^\eta \circ T)\Phi\varphi\|_{W_0^{1,p'}(\alpha)} \\
\leqslant\ & \tilde{C}_N \Bigg(\|(1 - \theta^\eta \circ T)\Phi\varphi\|_{L^{p'}(\alpha)} + \sum_{k=1}^N \left\|(1 - \theta^\eta \circ T)\frac{\partial(\Phi\varphi)}{\partial x_k}\right\|_{L^{p'}(\alpha)} \\
&+ \sum_{k=1}^N \left\|\frac{\partial(1 - \theta^\eta \circ T)}{\partial x_k}\Phi\varphi\right\|_{L^{p'}} \Bigg).
\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

因为映射 $T:\alpha=\beta\cap\Omega\to A=B\cap\mathbf{R}_+^N$ 是双 Lipschitz 的, 所以进行积分换元得

$$
\begin{aligned}
&\|(1-\theta^\eta\circ T)\Phi\varphi\|_{L^{p'}(\alpha)}\\
=&\left(\int_\alpha|1-\theta^\eta\circ T|^{p'}|\Phi\varphi|^{p'}\,\mathrm{d}x\right)^{1/p'}\\
=&\left(\int_A|1-\theta^\eta|^{p'}|(\Phi\varphi)\circ T^{-1}|^{p'}|\mathrm{Jac}(T^{-1})|\mathrm{d}x\right)^{1/p'}\\
\leqslant&\|1-\theta^\eta\|_{L^s(A)}\|(\Phi\varphi)\circ T^{-1}\|_{L^{q'}(A)}\|\mathrm{Jac}(T^{-1})\|_{L^\infty(A)}^{1/p'},
\end{aligned}
$$

其中, $\mathrm{Jac}(T^{-1})$ 表示映射 T^{-1} 的雅可比行列式.

令 $A^\eta=\{x\in A\mid 0<x_N<\bar\eta\}$, 则

$$
\|1-\theta^\eta\|_{L^s(A)}\leqslant\|1\|_{L^s(A^\eta)}=(\mathrm{meas}\ A^\eta)^{1/s}\leqslant C_A\bar\eta^{1/s},
$$

因而

$$
\|(1-\theta^\eta\circ T)\Phi\varphi\|_{L^{p'}(\alpha)}\leqslant C_A\bar\eta^{1/s}C_T\|\Phi\varphi\|_{L^{q'}(\alpha)}\leqslant C\bar\eta^{1/s}\|\varphi\|_{L^{q'}(\Omega)}. \tag{2.3.10}
$$

类似地, 对任何 $1\leqslant k\leqslant N$ 有

$$
\begin{aligned}
\left\|(1-\theta^\eta\circ T)\frac{\partial(\Phi\varphi)}{\partial x_k}\right\|_{L^{p'}(\alpha)}&\leqslant C_A\bar\eta^{1/s}C_T\left\|\frac{\partial(\Phi\varphi)}{\partial x_k}\right\|_{L^{q'}(\alpha)}\\
&\leqslant C\bar\eta^{1/s}\|\varphi\|_{W_0^{1,q'}(\Omega)},
\end{aligned} \tag{2.3.11}
$$

其中, 常数 $C>0$ 只依赖于 T, A 和 Φ.

最后, 因为 θ^η 只与 x_N 有关, 所以

$$
\frac{\partial(\theta^\eta\circ T)}{\partial x_N}=\frac{\partial\theta^\eta}{\partial x_N}\circ T\frac{\partial T_N}{\partial x_N},
$$

而在 A^η 的外部, $\dfrac{\partial\theta^\eta}{\partial x_N}=0$. 于是根据 Hölder 不等式, 由换元积分法得

$$
\begin{aligned}
&\left\|\frac{\partial(\theta^\eta\circ T)}{\partial x_N}\Phi\varphi\right\|_{L^{p'}(\alpha)}\\
=&\left(\int_{A^\eta}\left|\frac{\partial\theta^\eta}{\partial x_N}\cdot\left(\frac{\partial T_N}{\partial x_N}\right)\circ T^{-1}\cdot(\Phi\varphi)\circ T^{-1}\right|^{p'}|\mathrm{Jac}(T^{-1})|\mathrm{d}x\right)^{1/p'}\\
\leqslant&\left\|\frac{\partial\theta^\eta}{\partial x_N}\right\|_{L^s(A)}\left\|\left(\frac{\partial T_N}{\partial x_N}\right)\circ T^{-1}\right\|_{L^\infty(A)}\|(\Phi\varphi)\circ T^{-1}\|_{L^{q'}(A^\eta)}\|\mathrm{Jac}(T^{-1})\|_{L^\infty(A)}^{1/p'}.
\end{aligned}
$$

从 θ^η 的定义可知

$$
\left\|\frac{\partial\theta^\eta}{\partial x_N}\right\|_{L^s(A)}\leqslant\frac{2}{\bar\eta}(\mathrm{meas}\ A^\eta)^{1/s}\leqslant\frac{2}{\bar\eta}C_A\bar\eta^{1/s}.
$$

注意到对任何 $g \in W_0^{1,q'}(A)$ 有

$$\|g\|_{L^{q'}(A^\eta)} \leqslant \bar{\eta} \left\| \frac{\partial g}{\partial x_N} \right\|_{L^{q'}(A^\eta)},$$

所以令 $g = (\Phi\varphi) \circ T^{-1}$ 即可推出

$$\begin{aligned}
&\left\|(\Phi\varphi) \circ T^{-1}\right\|_{L^{q'}(A^\eta)} \\
&\leqslant \bar{\eta} \sum_{l=1}^{N} \left\| \frac{\partial(\Phi\varphi)}{\partial x_l} \circ T^{-1} \right\|_{L^{q'}(A)} \left\| \frac{\partial T_l^{-1}}{\partial x_N} \right\|_{L^\infty(A)} \\
&\leqslant \bar{\eta} C_T \sum_{l=1}^{N} \left\| \frac{\partial(\Phi\varphi)}{\partial x_l} \right\|_{L^{q'}(\alpha)}.
\end{aligned}$$

因此对任何 $1 \leqslant k \leqslant N$ 有

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial(\theta^\eta \circ T)}{\partial x_N} \Phi\varphi \right\|_{L^{p'}(\alpha)} &\leqslant \frac{2}{\bar{\eta}} C_A \bar{\eta}^{1/s} C_T \bar{\eta} \sum_{l=1}^{N} \left\| \frac{\partial(\Phi\varphi)}{\partial x_l} \right\|_{L^{q'}(\alpha)} \\
&\leqslant C \bar{\eta}^{1/s} \|\varphi\|_{W_0^{1,q'}(\Omega)},
\end{aligned} \tag{2.3.12}$$

结合式 (2.3.9)~(2.3.12) 即得式 (2.3.8), 从而得到式 (2.3.7). 再由式 (2.3.4) 即可证得式 (2.3.3). 证毕. □

定理 2.3.2 (Murat 定理) *设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是开区域, $1 < p < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. 若 $\{f^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 满足*

$$在\ W^{-1,p}(\Omega)\ 中,\ f^\varepsilon \rightharpoonup f^0 \quad (\varepsilon \to 0), \tag{2.3.13}$$

$$且在分布意义下\ f^\varepsilon \geqslant 0, \tag{2.3.14}$$

即 $\langle f^\varepsilon, \varphi \rangle \leqslant 0$ ($\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi \geqslant 0$), 则

$$在\ W_{\mathrm{loc}}^{-1,q}(\Omega)\ 中,\ f^\varepsilon \to f^0 \quad (\varepsilon \to 0), \quad \forall 1 < q < p. \tag{2.3.15}$$

进一步, 若 Ω 为带 Lipschitz 边界 $\partial\Omega$ 的有界开区域, 则

$$在\ W^{-1,q}(\Omega)\ 中,\ f^\varepsilon \to f^0 \quad (\varepsilon \to 0), \quad \forall 1 < q < p. \tag{2.3.16}$$

证明 把证明分为五步.

(1) 我们断言: 对任意 $K \subset\subset \Omega$, 存在常数 $C_K > 0$ 使得

$$|\langle f^\varepsilon, \varphi \rangle| \leqslant C_K \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \quad (\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \mathrm{supp}\,\varphi \subset K). \tag{2.3.17}$$

事实上, 对任意 $K \subset\subset \Omega$, 可选取非负函数 $\Phi_K \in \mathcal{D}(\Omega)$, 使得在 K 上 $\Phi_K \equiv 1$. 于是对任何 $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset K$ 有

$$-\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\Phi_K(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\Phi_K(x),$$

即

$$\varphi(x) + \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\Phi_K(x) \geqslant 0, \quad \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\Phi_K(x) - \varphi(x) \geqslant 0.$$

由假设 (2.3.14) 得

$$\langle f^\varepsilon, \varphi + \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\Phi_K\rangle \leqslant 0, \quad \langle f^\varepsilon, \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\Phi_K - \varphi\rangle \leqslant 0. \tag{2.3.18}$$

因为 $\{f^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 在 $W^{-1,p}(\Omega)$ 中弱收敛, 所以 $\{f^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 在 $W^{-1,p}(\Omega)$ 中有界, 从而由式 (2.3.18) 推出

$$|\langle f^\varepsilon, \varphi\rangle| \leqslant \langle f^\varepsilon, \Phi_K\rangle\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C_K\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

(2) 设 $\Phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ 和有界区域 $\Omega' \subset \Omega$ 满足 $\operatorname{supp}\Phi \subset \Omega'$. 若 Ω 有界就取 $\Omega' = \Omega$, 则根据假设 (2.3.13), (2.3.14), 由式 (2.3.17) 得

$$\text{在 } W^{-1,p}(\Omega) \text{ 中}, \ \Phi f^\varepsilon \rightharpoonup \Phi f^0 \quad (\varepsilon \to 0) \tag{2.3.19}$$

并且对任何 $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi \geqslant 0$ 有

$$|\langle \Phi f^\varepsilon, \varphi\rangle| \leqslant M\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}, \tag{2.3.20}$$

其中, 常数 $M > 0$ 与 φ 无关.

记 $C_0(\overline{\Omega'}) = \{\phi \in C(\overline{\Omega'}) : \phi(x) = 0, \ \forall x \in \partial\Omega'\}$, 则 $C_0(\overline{\Omega'})$ 按范数 $\|\cdot\|_{L^\infty(\overline{\Omega'})}$ 构成 Banach 空间. 于是由式 (2.3.20) 得

$$\Phi f^\varepsilon \ \text{ 在 } (C_0(\overline{\Omega'}))' \ \text{ 中有界}, \tag{2.3.21}$$

其中, $(C_0(\overline{\Omega'}))'$ 为 $C_0(\overline{\Omega'})$ 的共轭空间.

(3) 由 Sobolev 嵌入定理, 嵌入 $W_0^{1,r}(\Omega') \hookrightarrow C_0(\overline{\Omega'})$ $(\forall r > N)$ 是紧的, 从而由对偶性原理, 嵌入 $(C_0(\overline{\Omega'}))' \hookrightarrow W^{-1,r'}(\Omega')$ $\left(1 < r' = \dfrac{r}{r-1} < \dfrac{N}{N-1}\right)$ 也是紧的. 因此从式 (2.3.21) 可推出: 对任何 $1 < r' < \dfrac{N}{N-1}$ 有

$$\text{在 } W^{-1,r'}(\Omega') \text{ 中}, \ \Phi f^\varepsilon \to \Phi f^0 \quad (\varepsilon \to 0). \tag{2.3.22}$$

(4) 根据经典的插值定理, 对任何 $0 < \theta < 1$, $1 < p_0$, $p_1 < \infty$, $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}$ 有

$$\left(W^{-1,p_0}(\mathbf{R}^N), W^{-1,p_1}(\mathbf{R}^N)\right)_{\theta,q} = W^{-1,q}(\mathbf{R}^N).$$

特别地, 若 $\varphi \in W^{-1,p_0}(\mathbb{R}^N) \cap W^{-1,p_1}(\mathbb{R}^N)$, 则 $\varphi \in W^{-1,q}(\mathbb{R}^N)$ 且

$$\|\varphi\|_{W^{-1,q}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|\varphi\|^{1-\theta}_{W^{-1,p_0}(\mathbb{R}^N)}\|\varphi\|^{\theta}_{W^{-1,p_1}(\mathbb{R}^N)}. \tag{2.3.23}$$

取 $p_0 = p$, $p_1 = r'$ $\left(1 < r' < \dfrac{N}{N-1}\right)$, 并且把 Φf^ε 自然地延拓到整个 $\mathbb{R}^N$ 上, 即在 Ω' 的外部, 令 $\Phi f^\varepsilon = 0$, 则由式 (2.3.23), 对任何 $1 < q < p$ 有

$$\begin{aligned}&\|\Phi f^\varepsilon - \Phi f^0\|_{W^{-1,q}(\mathbb{R}^N)}\\ \leqslant &C\|\Phi f^\varepsilon - \Phi f^0\|^{1-\theta}_{W^{-1,p_0}(\mathbb{R}^N)}\|\Phi f^\varepsilon - \Phi f^0\|^{\theta}_{W^{-1,p_1}(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

因此由式 (2.3.19) 和 (2.3.22) 即得式 (2.3.15).

(5) 对任意足够小的 $\eta > 0$, 应用引理 2.3.2, 存在 $\psi^\eta \in \mathcal{D}(\Omega)$ 满足不等式 (2.3.3) 且 $(1-\psi^\eta)f^\varepsilon \in W^{-1,p}(\Omega)$. 于是对任何 $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ 有

$$\begin{aligned}|\langle(1-\psi^\eta)f^\varepsilon, \varphi\rangle| &= |\langle f^\varepsilon, (1-\psi^\eta)\varphi\rangle|\\ &\leqslant \|f^\varepsilon\|_{W^{-1,p}(\Omega)}\|(1-\psi^\eta)\varphi\|_{W_0^{1,p'}(\Omega)}\\ &\leqslant \eta\|f^\varepsilon\|_{W^{-1,p}(\Omega)}\|\varphi\|_{W_0^{1,q'}(\Omega)}, \quad q' > p',\end{aligned}$$

即

$$\|(1-\psi^\eta)f^\varepsilon\|_{W^{-1,q}(\Omega)} \leqslant \eta\|f^\varepsilon\|_{W^{-1,p}(\Omega)}.$$

固定 $\eta > 0$, 由式 (2.3.15) 得

$$\text{在 } W^{-1,q}(\Omega') \text{ 中}, \quad \psi^\eta f^\varepsilon \to \psi^\eta f^0.$$

另一方面, 我们有分解

$$f^\varepsilon = (1-\psi^\eta)f^\varepsilon + \psi^\eta f^\varepsilon, \quad f^0 = (1-\psi^\eta)f^0 + \psi^\eta f^0.$$

因此令 $\eta \to 0$ 即得 (2.3.16). 这就完成了定理 2.3.2 的证明. □

评 注

Young 测度表示定理的证明选自文献 [8], 该定理由 Tartar[9] 发展成为分析非线性偏微分方程的工具. 二阶行列式的弱连续性定理也称为 Div-Curl 引理, 它是补偿列紧理论的原型, 其重要性可见一斑. 定理 2.3.1 选自文献 [10]; 定理 2.3.2 选自 Murat 的法语论文 [11]. 有必要指出, 定理 2.3.2 和本书的内容是相互独立的, 读者可以忽略其中任何细节. 我们之所以把它编入本书, 是因为它曾被本领域的一些科研论文 (如 [12, 13]) 引用.

第3章　标 量 方 程

本章讨论标量守恒律的柯西问题. 对单个守恒律方程的研究已有很久的历史, 并且这类方程广义解的存在性和唯一性问题已得到很好的研究, 请参看 [5, 14~16] 或专著 [2] 中相关的参考文献. Tartar[9] 最先把补偿列紧理论应用于标量方程这一双曲守恒律中最简单的模型, 开创了用补偿列紧方法研究双曲守恒律广义解的存在性的先河. 他在文献 [9] 中借助于 Kružkov 熵导出了单个守恒律方程的 L^∞ 解及 L^p 解的存在性, 而我们将通过构造两族特殊形式的熵-熵流对之给出一个简洁的证明.

3.1　L^∞ 熵 解

本节将对下述标量守恒律的柯西问题:

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{3.1.1}$$

L^∞ 解的存在性给出一个非常简洁的证明, 其中实值函数 $f(u)$ 二阶连续可微, 初值 $u_0(x)$ 有界可测.

定理 3.1.1　设 $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ 为有界开集, 函数列 $u^\varepsilon : \Omega \to \mathbb{R}$ 满足

$$\text{w}^*\text{-}\lim u^\varepsilon = u, \quad \text{w}^*\text{-}\lim f(u^\varepsilon) = v, \tag{3.1.2}$$

其中, $f \in C^2(-\|u_0(x)\|_{L^\infty}, \|u_0(x)\|_{L^\infty})$. 如果

$$\eta_i(u^\varepsilon)_t + q_i(u^\varepsilon)_x \ (i = 1, 2) \text{ 在 } H^{-1}_{\text{loc}}(\Omega) \text{ 中紧}, \tag{3.1.3}$$

其中

$$(\eta_1(\theta), q_1(\theta)) = (\theta - k, f(\theta) - f(k)), \tag{3.1.4}$$

$$(\eta_2(\theta), q_2(\theta)) = \left(f(\theta) - f(k), \int_k^\theta f'^2(s)\mathrm{d}s\right), \tag{3.1.5}$$

k 为任意常数, 那么

(1) $v = f(u)$ 几乎处处成立, 并且

(2) $u^\varepsilon \xrightarrow{\text{a.e.}} u \ (\varepsilon \to 0)$, 如果

$$\text{meas}\,\{u : f''(u) = 0\} = 0. \tag{3.1.6}$$

证明 利用 (3.1.3) 和二阶行列式的弱连续性定理, 有

$$\text{w}^*\text{-}\lim\begin{vmatrix}\eta_1(u^\varepsilon) & q_1(u^\varepsilon)\\ \eta_2(u^\varepsilon) & q_2(u^\varepsilon)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\overline{\eta_1(u^\varepsilon)} & \overline{q_1(u^\varepsilon)}\\ \overline{\eta_2(u^\varepsilon)} & \overline{q_2(u^\varepsilon)}\end{vmatrix}. \tag{3.1.7}$$

这里上划线表示弱 * 极限, 如

$$\overline{\eta(u^\varepsilon)}=\text{w}^*\text{-}\lim\eta(u^\varepsilon),\quad \overline{q(u^\varepsilon)}=\text{w}^*\text{-}\lim q(u^\varepsilon).$$

然而

$$\begin{vmatrix}\overline{\eta_1(u^\varepsilon)} & \overline{q_1(u^\varepsilon)}\\ \overline{\eta_2(u^\varepsilon)} & \overline{q_2(u^\varepsilon)}\end{vmatrix}=\overline{u^\varepsilon-k}\,\overline{\int_k^{u^\varepsilon}(f'(s))^2\mathrm{d}s}-(\overline{f(u^\varepsilon)-f(k)})^2, \tag{3.1.8}$$

以及

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix}\eta_1(u^\varepsilon) & q_1(u^\varepsilon)\\ \eta_2(u^\varepsilon) & q_2(u^\varepsilon)\end{vmatrix}\\ =&(u^\varepsilon-u)\int_u^{u^\varepsilon}f'^2(s)\mathrm{d}s-(f(u^\varepsilon)-f(u))^2\\ &+(u-k)\int_u^{u^\varepsilon}f'^2(s)\mathrm{d}s+(u^\varepsilon-k)\int_k^{u}f'^2(s)\mathrm{d}s\\ &-(f(u)-f(k))^2-2(f(u^\varepsilon)-f(u))(f(u)-f(k)).\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

因此, 根据式 (3.1.7)~(3.1.9), 存在一个零测集 Ω_1, 使得对任何 $(x,t)\in\Omega-\Omega_1$ 有

$$\begin{aligned}&\overline{(u^\varepsilon-u)\int_u^{u^\varepsilon}f'^2(s)\mathrm{d}s-(f(u^\varepsilon)-f(u))^2}\\ &+(u-k)\overline{\int_u^{u^\varepsilon}f'^2(s)\mathrm{d}s}+\overline{(u^\varepsilon-k)}\int_k^{u}f'^2(s)\mathrm{d}s\\ &-[f(u)-f(k)]^2-2\overline{[f(u^\varepsilon)-f(u)]}[f(u)-f(k)]\\ =&\overline{u^\varepsilon-k}\,\overline{\int_k^{u^\varepsilon}f'^2(s)\mathrm{d}s}-[\overline{f(u^\varepsilon)-f(k)}]^2\\ =&\overline{u^\varepsilon-k}\,\overline{\int_k^{u^\varepsilon}f'^2(s)\mathrm{d}s}-[\overline{f(u^\varepsilon)-f(u)}]^2\\ &-[f(u)-f(k)]^2-2\overline{[f(u^\varepsilon)-f(u)]}[f(u)-f(k)].\end{aligned} \tag{3.1.10}$$

因为

$$
\begin{aligned}
\overline{u^\varepsilon - k}\,\overline{\int_k^{u^\varepsilon} f'^2(s)\mathrm{d}s} =& \overline{(u^\varepsilon - u)}\,\overline{\int_u^{u^\varepsilon} f'^2(s)\mathrm{d}s} + (u-k)\overline{\int_u^{u^\varepsilon} f'^2(s)\mathrm{d}s} \\
&+\overline{u^\varepsilon - k}\int_k^{u} f'^2(s)\mathrm{d}s \\
=& (u-k)\overline{\int_u^{u^\varepsilon} f'^2(s)\mathrm{d}s} + \overline{u^\varepsilon - k}\int_k^{u} f'^2(s)\mathrm{d}s,
\end{aligned} \tag{3.1.11}
$$

所以由式 (3.1.10) 和 (3.1.11) 得

$$
\overline{(u^\varepsilon - u)\int_u^{u^\varepsilon} f'^2(s)\mathrm{d}s - [f(u^\varepsilon) - f(u)]^2} + [\overline{f(u^\varepsilon) - f(u)}]^2 = 0. \tag{3.1.12}
$$

由于式 (3.1.14) 左端的两项都非负, 因而我们有

$$
\overline{(u^\varepsilon - u)\int_u^{u^\varepsilon} f'^2(s)\mathrm{d}s - [f(u^\varepsilon) - f(u)]^2} = 0, \tag{3.1.13}
$$

以及

$$
[\overline{f(u^\varepsilon) - f(u)}]^2 = 0. \tag{3.1.14}
$$

由式 (3.1.14) 即得 $v = f(u)$. 而式 (3.1.13) 蕴涵着

$$
\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \left[(u^\varepsilon - u)\int_u^{u^\varepsilon} f'^2(s)\mathrm{d}s - \big(f(u^\varepsilon) - f(u)\big)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0,
$$

从而

$$
\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega(|u^\varepsilon - u|>\alpha)} \left[(u^\varepsilon - u)\int_u^{u^\varepsilon} f'^2(s)\mathrm{d}s - \big(f(u^\varepsilon) - f(u)\big)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0.
$$

因为

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left((\theta - u)\int_u^{\theta} f'^2(s)\mathrm{d}s - \big(f(\theta) - f(u)\big)^2\right) = \int_u^{\theta}[f'(\theta) - f'(s)]^2\mathrm{d}s,
$$

所以若 $f''(u) \neq 0$ (a.e. $u \in \mathbb{R}$), 则

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega(u^\varepsilon - u>\alpha)} \left[(u^\varepsilon - u)\int_u^{u^\varepsilon} f'^2(s)\mathrm{d}s - \big(f(u^\varepsilon) - f(u)\big)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
\geqslant\, & C_\alpha \mathrm{meas}\,\{\Omega(u^\varepsilon - u > \alpha)\}, \\
&\int_{\Omega(u^\varepsilon - u<-\alpha)} \left[(u^\varepsilon - u)\int_u^{u^\varepsilon} (f'(s))^2\mathrm{d}s - \big(f(u^\varepsilon) - f(u)\big)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
\geqslant\, & C_\alpha \mathrm{meas}\,\{\Omega(u^\varepsilon - u < -\alpha)\}
\end{aligned}
$$

对某个与 ε 无关的正常数 C_α 成立. 因此, 对任意给定的常数 $\alpha>0$ 有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\text{meas}\{\Omega(|u^\varepsilon-u|>\alpha)\}=0.$$

这表明 $\{u^\varepsilon\}$ 依测度收敛于 u, 从而存在其子列几乎处处收敛于 u. 证毕. □

定理 3.1.2 *若 $u_0(x)\in L^\infty$, $f\in C^2(-\|u_0(x)\|_{L^\infty},\|u_0(x)\|_{L^\infty})$, 则由下述方程:*

$$u_t^\varepsilon+f(u^\varepsilon)_x=\varepsilon u_{xx}^\varepsilon \tag{3.1.15}$$

带有界可测初值

$$u^\varepsilon(x,0)=u_0(x) \tag{3.1.16}$$

的柯西问题唯一确定的黏性解序列 $\{u^\varepsilon\}$ 满足紧性条件 (3.1.3).

证明 因为初值 $u_0(x)$ 在 L^∞ 空间中有界, 所以由关于抛物型方程的经典的极值原理, 黏性解 u^ε 有先验 L^∞ 界估计

$$\|u^\varepsilon(x,t)\|_{L^\infty}\leqslant\|u_0(x)\|_{L^\infty}, \tag{3.1.17}$$

这就蕴涵着 u^ε 的全局存在性.

设 $K\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ 为任一紧集, 选取函数 $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 使得 $\phi|_K=1, 0\leqslant\phi\leqslant 1$. 用 $u^\varepsilon\phi$ 乘方程 (3.1.15) 并在 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ 上积分得

$$\begin{aligned}&\varepsilon\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty(u_x^\varepsilon)^2\phi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty\left[\frac{1}{2}(u^\varepsilon)^2\phi_t+\left(u^\varepsilon f(u^\varepsilon)-\int_0^{u^\varepsilon}f(s)\mathrm{d}s\right)\phi_x\right.\\&\quad\left.+\frac{1}{2}\varepsilon(u^\varepsilon)^2\phi_{xx}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant M(\phi),\end{aligned}$$

从而

$$\varepsilon(u_x^\varepsilon)^2\text{ 在 }L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)\text{ 中有界}. \tag{3.1.18}$$

对任何熵 $\eta(u)\in C^2(\mathbb{R})$ 可从方程 (3.1.15) 推出

$$\eta(u^\varepsilon)_t+q(u^\varepsilon)_x=\varepsilon\eta(u^\varepsilon)_{xx}-\varepsilon\eta''(u^\varepsilon)(u_x^\varepsilon)^2=I_1+I_2, \tag{3.1.19}$$

其中, q 是相应于 η 的熵流. 由结论 (3.1.18) 易见 I_2 在 $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中有界, 因而由专著 [17] 中第 10 章的 Schauder 定理知 I_2 对某个指数 $\alpha\in(1,2)$ 在 $W_{\text{loc}}^{-1,\alpha}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中紧; 显然 I_1 在 $H_{\text{loc}}^{-1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中紧. 又因式 (3.1.19) 的左端在 $W_{\text{loc}}^{-1,\infty}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中有界, 故由嵌入定理即可完成本定理的证明. □

结合定理 3.1.1 和定理 3.1.2, 就得到本节的主要定理:

定理 3.1.3 *设 $u_0(x) \in L^\infty$, $f \in C^2(-\|u_0(x)\|_{L^\infty}, \|u_0(x)\|_{L^\infty})$, 则柯西问题 (3.1.1) 存在弱解 $u \in L^\infty$. 进一步, 若 $f(u)$ 满足 (3.1.6), 则弱解 u 也是 Lax 意义下的熵解, 即*

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [\eta(u)\phi_t + q(u)\phi_x]\mathrm{d}x\mathrm{d}t \geqslant 0,$$

其中, 函数对 $(\eta, q) \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)$ 满足 $q'(u) = \eta'(u)f'(u)$, $\eta''(u) \geqslant 0$, $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ 为任意非负函数.

3.2 L^p $(1 < p < \infty)$ 解

本节考虑柯西问题 (3.1.1) 的 L^p 解, 但要求非线性流函数和初值满足下述条件:

(C_1) $f(u) \in C^2$, 且具有性质

$$|f(u)| \leqslant C|u|^{s+1}, \quad |f'(u)| \leqslant C|u|^s \quad (s \geqslant 0). \tag{3.2.1}$$

(C_2) $\|u_0(x)\|_{L^{2(s+1)}} \leqslant M$.

类似于 3.1 节, 首先讨论抛物型方程

$$u_t^\varepsilon + f(u^\varepsilon)_x = \varepsilon u_{xx}^\varepsilon \tag{3.2.2}$$

带光滑初值

$$u^\varepsilon(x,0) = u_0^\varepsilon(x) = \phi_\varepsilon(x)(u_0(x) * j^\varepsilon) \tag{3.2.3}$$

的柯西问题, 其中光滑函数 $\phi_\varepsilon(x)$ 满足 $0 \leqslant \phi_\varepsilon(x) \leqslant 1$, $\operatorname{supp}\phi_\varepsilon(x) \subset [-2/\varepsilon, 2/\varepsilon]$ 且在 $[-1/\varepsilon, 1/\varepsilon]$ 上 $\phi_\varepsilon(x) = 1$; j^ε 是磨光核, 即

$$j^\varepsilon = j^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon A} \mathrm{e}^{\varepsilon^2/(x^2-\varepsilon^2)}, & |x| < \varepsilon, \\ 0, & |x| \geqslant \varepsilon, \end{cases}$$

其中, $A = \displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{e}^{1/(x^2-1)}\mathrm{d}x$. 今后若非特殊说明, j^ε 均表示磨光核. 因此 $u_0^\varepsilon(x)$ 光滑且满足

$$\lim_{|x|\to\infty} u_0^\varepsilon(x) = 0, \quad u_0^\varepsilon(x) \xrightarrow{\text{a.e.}} u_0(x) \ (\varepsilon \to 0),$$

$$\|u_0^\varepsilon(x)\|_{L^\infty} \leqslant M(\varepsilon), \quad \|u_0^\varepsilon(x)\|_{L^{2(s+1)}} \leqslant \|u_0(x)\|_{L^{2(s+1)}} \leqslant M,$$

其中, 常数 $M(\varepsilon)$ 与 ε 有关.

引理 3.2.1 *假设 C_1, C_2 成立, 则对任意给定的 $\varepsilon > 0$ 和时间 $T > 0$, 柯西问题 (3.2.2)–(3.2.3) 的光滑解 $u^\varepsilon(x,t)$ 在 $\mathbb{R} \times [0,T]$ 上存在唯一且满足*

$$\|u^\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^{2(s+1)}} \leqslant M, \quad \lim_{|x|\to\infty} u^\varepsilon(x,t) = 0 \text{ 对 } t \in [0,T] \text{ 一致成立.} \tag{3.2.4}$$

证明 由于初值 $|u_0^\varepsilon(x)| \leqslant M(\varepsilon)$, 所以类似于定理 3.1.2 的证明可得解的存在性, 而解的性质 $u^\varepsilon(x,t) \to 0\ (|x| \to \infty)$ 可由定理 1.0.2 得到. 为了得到 (3.2.4) 中的第一部分即解的 $L^{2(s+1)}$ 界估计, 我们用 $2(s+1)(u^\varepsilon)^{2s+1}$ 乘方程 (3.2.2) 并在 $\mathbb{R} \times [0,t]$ 积分得

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}(u^\varepsilon)^{2(s+1)}\mathrm{d}x + \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}2\varepsilon(s+1)(2s+1)(u^\varepsilon)^{2s}(u_x^\varepsilon)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ \leqslant &\int_{-\infty}^{\infty}(u_0^\varepsilon(x))^{2(s+1)}\mathrm{d}x \leqslant M.\end{aligned}$$

这就完成了引理 3.2.1 的证明. □

现在研究柯西问题 (3.1.1) 的 $L^{2(s+1)}$ 弱解.

引理 3.2.2 *设 $(C_1),(C_2)$ 成立, 则柯西问题 (3.2.2)–(3.2.3) 的解 u^ε 满足*

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}}u_x^\varepsilon \text{ 在 } L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+) \text{ 中一致有界}. \tag{3.2.5}$$

证明 设 $K \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ 为任一紧集, 选取 $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 使得 $\phi|_K = 1,\ 0 \leqslant \phi \leqslant 1$, 然后用 $u^\varepsilon\phi$ 乘方程 (3.2.2) 并在 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ 上分部积分得

$$\begin{aligned}&\varepsilon\int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty}(u_x^\varepsilon)^2\phi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ =&\int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2}(u^\varepsilon)^2\phi_t + \left(u^\varepsilon f(u^\varepsilon) - \int_0^{u^\varepsilon}f(s)\mathrm{d}s\right)\phi_x + \frac{1}{2}\varepsilon(u^\varepsilon)^2\phi_{xx}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ \leqslant &M(\phi,\|u^\varepsilon\|_{L^{2(s+1)}}),\end{aligned}$$

这就证明了结论 (3.2.5). 证毕. □

引理 3.2.3 *设 $(C_1),(C_2)$ 成立, 则对任何 $n \in \mathbb{Z}^+$ 有*

$$\frac{\partial}{\partial t}I_n(u^\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x}f_n(u^\varepsilon), \quad \frac{\partial}{\partial t}f_n(u^\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x}F_n(u^\varepsilon)$$

在 $H^{-1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 中紧, 其中 $\Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ 为有界开集, 函数 $I_n \in C_c^2(\mathbb{R})$ 满足 $|I_n(u)| \leqslant |u|$, 且当 $|u| \leqslant n$ 时 $I_n(u) = u$, 当 $|u| \geqslant 2n$ 时 $I_n(u) = 0$; 函数 $f_n,\ F_n$ 定义如下:

$$f_n(u) \quad \int_0^u I_n'(s)f'(s)\mathrm{d}s, \quad F_n(u) = \int_0^u f_n'(s)f'(s)\mathrm{d}s.$$

证明 利用引理 3.2.2 并注意到 n 固定时这些熵–熵流的有界性, 我们可用证明定理 3.1.2 的相同方法完成证明. 证毕. □

引理 3.2.4 *设 $(C_1),(C_2)$ 成立. 若 f 满足条件 (3.1.6), 则存在黏性解的子列 $\{u^\varepsilon\}$ 在 $L^h_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)\ (1 < h < 2(s+1))$ 中强收敛于柯西问题 (3.1.1) 的弱解 u.*

证明　因为黏性解序列 $\{u^\varepsilon\}$ 在 $L^{2(s+1)}$ 中一致有界, 所以存在子列 $\{u^\varepsilon\}$ 使得 $u^\varepsilon \rightharpoonup u$. 用 $\overline{v^\varepsilon}$ 表示 v^ε 的弱极限, 即 $v^\varepsilon \rightharpoonup \overline{v^\varepsilon}$, 则由二阶行列式的弱连续性定理得

$$\overline{H_n(u^\varepsilon,k)} = H_n^*(u^\varepsilon,k),$$

其中, k 为任意常数.

$$H_n(u^\varepsilon,k) = [F_n(u^\varepsilon) - F_n(k)][I_n(u^\varepsilon) - I_n(k)] - [f_n(u^\varepsilon) - f_n(k)]^2, \tag{3.2.6}$$

$$H_n^*(u^\varepsilon,k) = [\overline{F_n(u^\varepsilon)} - F_n(k)][\overline{I_n(u^\varepsilon)} - I_n(k)] - [\overline{f_n(u^\varepsilon)} - f_n(k)]^2. \tag{3.2.7}$$

于是存在零测集 $\Omega_1 \subset \Omega$ 使得

$$\overline{H_n(u^\varepsilon(x,t),u(y,\tau))} = H_n^*(u^\varepsilon(x,t),u(y,\tau)), \quad \forall (y,\tau) \in \Omega - \Omega_1,$$

因而令 $(y,\tau) = (x,t) \in \Omega - \Omega_1$ 就有

$$\overline{H_n(u^\varepsilon(x,t),u(x,t))} = H_n^*(u^\varepsilon(x,t),u(x,t)).$$

又因

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |H_n(u^\varepsilon(x,t),u(x,t))|\mathrm{d}x \\
\leqslant\ & C + C\int_\Omega \left[|u^\varepsilon(x,t)|^{2(s+1)} + |u(x,t)|^{2(s+1)}\right]\mathrm{d}x \leqslant \tilde{C}, \\
&\int_\Omega |H_n^*(u^\varepsilon(x,t),u(x,t))|\mathrm{d}x \\
\leqslant\ & C + C\int_\Omega \left[|u^\varepsilon(x,t)|^{2(s+1)} + |u(x,t)|^{2(s+1)}\right]\mathrm{d}x \leqslant \tilde{C},
\end{aligned}$$

故由勒贝格控制收敛定理, 从式 (3.2.7) 可推出

$$\lim_{n\to\infty} H_n^*(u^\varepsilon,u) = -[\overline{f(u^\varepsilon)} - f(u)]^2.$$

而由 Young 测度表示定理, 从式 (3.2.6) 可推出

$$\lim_{n\to\infty} \overline{H_n(u^\varepsilon,u)} = \overline{(u^\varepsilon - u)\int_u^{u^\varepsilon} (f'(s))^2\mathrm{d}s - (f(u^\varepsilon) - f(u))^2}.$$

因此

$$\overline{(u^\varepsilon - u)\int_u^{u^\varepsilon} (f'(s))^2\mathrm{d}s - (f(u^\varepsilon) - f(u))^2} = -(\overline{f(u^\varepsilon)} - f(u))^2,$$

从而

$$(\overline{f(u^\varepsilon)} \quad f(u))^2 = 0, \quad \text{即}\ \overline{f(u^\varepsilon)} - f(u) = 0;$$

$$\overline{(u^\varepsilon - u)\int_u^{u^\varepsilon} (f'(s))^2 \mathrm{d}s - (f(u^\varepsilon) - f(u))^2} = 0.$$

剩余部分与定理 3.1.1 的证明中的相应部分完全相似. 证毕. □

把引理 3.2.1～引理 3.2.4 相结合就得到本节的主要定理:

定理 3.2.1 *设 $(C_1), (C_2)$ 成立. 若 f 满足条件 (3.1.6), 则柯西问题 (3.1.1) 存在 $L^{2(s+1)}$ $(s \geqslant 0)$ 弱解.*

评　注

在 Tartar 把补偿列紧理论用于研究标量方程而得到其 L^∞ 解之后, Schonbek[18] 应用补偿列紧方法研究了下述带黏性的 KdV-Burger 方程

$$u_t + uu_x + \delta u_{xxx} = \varepsilon u_{xx}$$

以及带黏性的 BBM-Burger 方程

$$u_t + uu_x - \delta u_{xxt} = \varepsilon u_{xx}$$

的 L^p $(1 < p < \infty)$ 解序列 $\{u^{\varepsilon,\delta}\}$ 的强收敛性. 当 ε 和 δ 之间具有适当的量阶关系, 且流函数 $f(u)$ 严格凸时, Schonbek 成功地得到了柯西问题 (3.1.1) 的 L^p 弱解. Lu[19] 推广了文献 [18] 中的结果, 不要求流函数 $f(u)$ 严格凸而只需要 $\operatorname{meas}\{u : f''(u) = 0\} = 0$.

本章的证明选自文献 [20]. 在文献 [21, 22] 中, 这个简洁的证明被用来研究系统

$$\begin{cases} (u + qz)_t + f(u)_x = 0, \\ z_t + kg(u)z = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

的弱解. 系统 (3.1) 由 Majda[23] 作为一个化学反应模型导出, 其中 q 是正常数, k 表示化学原料的反应率.

在文献 [24] 中, Szepessy 推广了最先由 DiPerna[25] 提出的关于多维单个守恒律的测度值解的概念, 从而证明了柯西问题 (3.1.1) 的 L^p $(p > 1)$ 弱解存在唯一. 在 Szepessy 的证明中, 不需要流函数满足条件 (3.1.6) 且增长性条件 (3.2.1) 被放宽到 $|f(u)| \leqslant C|u|^q$ $(0 < q < p)$.

第4章　2×2 双曲守恒律的预备知识

除第 3 章研究了标量方程之外, 本书主要集中于 2×2 双曲守恒律系统的研究. 第 5~12 章将用补偿列紧方法处理不同类型的系统. 这里所说的类型以双曲性、线性等来划分.

4.1　基本概念

考虑下述双曲守恒律系统:

$$\begin{cases} u_t + f(u,v)_x = 0, \\ v_t + g(u,v)_x = 0, \end{cases} \tag{4.1.1}$$

其中, u, v 为实函数. 令 $U=(u,v)^{\mathrm{T}}$, $F(U)=(f,g)^{\mathrm{T}}$, 则系统 (4.1.1) 可改写为

$$U_t + \mathrm{d}F(U)U_x = 0, \tag{4.1.2}$$

其中, $\mathrm{d}F(U)$ 为 F 的雅可比矩阵, 即

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}F(U) = \begin{bmatrix} f_u(u,v) & f_v(u,v) \\ g_u(u,v) & g_v(u,v) \end{bmatrix}.$$

下述定义均摘自 Smoller 的专著 [2], 读者也可参阅文献 [5, 26].

定义 4.1.1　*若 $\mathrm{d}F$ 有两个实的特征值 λ_1 和 λ_2, 则称系统 (4.1.1) 是双曲的; 若 $\lambda_1<\lambda_2$, 则称系统 (4.1.1) 是严格双曲的; 若在某些点或某个区域上 $\lambda_1=\lambda_2$, 则称系统 (4.1.1) 是非严格双曲的或双曲退化的.*

记 l_{λ_1}, l_{λ_2}, r_{λ_1} 和 r_{λ_2} 为分别相应于特征值 λ_1 和 λ_2 的左、右特征向量.

定义 4.1.2　*称系统 (4.1.1) 的第一特征场为真正非线性的, 如果 $\nabla\lambda_1\cdot r_{\lambda_1}\neq 0$; 称系统 (4.1.1) 的第二特征场为真正非线性的, 如果 $\nabla\lambda_2\cdot r_{\lambda_2}\neq 0$. 如果在某集合 D 内 $\nabla\lambda_1\cdot r_{\lambda_1}=0$ 或 $\nabla\lambda_2\cdot r_{\lambda_2}=0$, 那么称系统 (4.1.1) 的第一或第二特征场在 D 内是线性退化的.*

定义 4.1.3　*称函数 $w(u,v)$, $z(u,v)$ 为系统 (4.1.1) 分别相应于特征值 λ_1 和 λ_2 的黎曼不变量, 如果它们满足*

$$\nabla w\cdot r_{\lambda_1}=0, \quad \nabla z\cdot r_{\lambda_2}=0.$$

定义 4.1.4 *一对函数 $(\eta(U), q(U))$ 称为系统 (4.1.2) 的熵-熵流, 如果它们满足*

$$\nabla q(U) = \nabla\eta(U)\mathrm{d}F(U). \tag{4.1.3}$$

若 $n \leqslant 2$, 则我们可通过求解方程组 (4.1.3) 而得到一类熵及其相应的熵流. 然而, 若 $n > 2$, 则方程组 (4.1.3) 是超定的而只对一些非常特殊的情形可求解. 从第 3 章可看出, 补偿列紧方法在守恒律中的应用很大程度上依赖于双曲系统的熵. 因此, 至今为止, 几乎所有的结果都是把这方法应用于由两个方程组成的双曲守恒律系统而得到.

4.2 黏性解的 L^∞ 估计

与标量方程相似, 对给定的双曲守恒律系统, 首先需要构造它的逼近解. 例如, 由下述方程组:

$$\begin{cases} u_t + f(u,v)_x = \varepsilon u_{xx}, \\ v_t + g(u,v)_x = \varepsilon v_{xx} \end{cases} \tag{4.2.1}$$

带有界可测初值

$$(u(x,0), v(x,0)) = (u_0(x), v_0(x)) \tag{4.2.2}$$

的柯西问题所确定的黏性解 $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$.

为了得到 $\{(u^\varepsilon, v^\varepsilon)\}$ 关于黏性参数 ε 的先验一致 L^∞ 界估计, 一般说来, 可用的唯一框架就是由 Chueh, Conley 和 Smoller[27] 建立的不变域方法. 现在我们把文献 [27] 中关于柯西问题 (4.2.1)–(4.2.2) 的解的先验估计的主要结果概述如下:

定理 4.2.1 *设 w, z 为系统 (4.1.1) 的两个黎曼不变量. 若曲线 $w = M_1$ (或 $z = M_2$) 在 uOv 平面上下凸, 即对任何向量 $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ 有*

$$w_{uu}a^2 + 2w_{uv}ab + w_{vv}b^2 \geqslant 0 \quad (\text{或 } z_{uu}a^2 + 2z_{uv}ab + z_{vv}b^2 \geqslant 0),$$

则柯西问题 (4.2.1)–(4.2.2) 的解 $(u^\varepsilon(x,t), v^\varepsilon(x,t))$ 满足

$$w(u^\varepsilon(x,t), v^\varepsilon(x,t)) \leqslant M_1 \quad (\text{或 } z(u^\varepsilon(x,t), v^\varepsilon(x,t)) \leqslant M_2),$$

如果初值 $(u_0(x), v_0(x))$ 满足相同的估计 $w(u_0(x), v_0(x)) \leqslant M_1$ (或 $z(u_0(x), v_0(x)) \leqslant M_2$), 其中 M_1, M_2 为常数.

若曲线 $w = M_1$ 与 $z = M_2$ 均下凸, 则

$$w(u^\varepsilon(x,t), v^\varepsilon(x,t)) \leqslant M_1, \quad z(u^\varepsilon(x,t), v^\varepsilon(x,t)) \leqslant M_2,$$

如果

$$w(u_0(x), v_0(x)) \leqslant M_1, \quad z(u_0(x), v_0(x)) \leqslant M_2.$$

这个定理非常重要, 其细节与评注请读者参看文献 [27].

第5章　对称系统

5.1　基本概念

本章讨论对称双曲系统

$$\begin{cases} u_t + (u\phi(r))_x = 0, \\ v_t + (v\phi(r))_x = 0 \end{cases} \tag{5.1.1}$$

带有界可测初值

$$(u(x,0), v(x,0)) = (u_0(x), v_0(x)) \tag{5.1.2}$$

的柯西问题广义解的存在性, 其中 $r = u^2 + v^2$. 系统 (5.1.1) 是非常有趣的, 因为它源于弹性理论、磁流体动力学以及提高石油采收率的理论 (见文献 [28, 29]).

设映射 $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 定义如下:

$$F : (u, v) \to (u\phi(r), v\phi(r)),$$

则 $\mathrm{d}F$ 的两个特征值为

$$\lambda_1 = \phi(r), \quad \lambda_2 = \phi(r) + 2r\phi'(r), \tag{5.1.3}$$

其相应的右特征向量为

$$\boldsymbol{r}_1 = (-v, u)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{r}_2 = (u, v)^{\mathrm{T}}.$$

经过简单的计算得

$$\nabla\lambda_1 \cdot \boldsymbol{r}_1 = 0, \quad \nabla\lambda_2 \cdot \boldsymbol{r}_2 = 6r\phi'(r) + 4r^2\phi''(r). \tag{5.1.4}$$

因此, 由式 (5.1.3) 知系统 (5.1.1) 在满足 $r\phi'(r) = 0$ 的那些点上非严格双曲, 并且由式 (5.1.4) 知第一特征场线性退化, 但第二特征场是真正非线性还是线性退化完全取决于函数 $\phi(r)$ 的性态.

在本章假设

$$\phi(r) \in C^2(\mathbb{R}^+), \quad \operatorname{meas}\{r : 3\phi'(r) + 2r\phi''(r) = 0\} = 0, \tag{5.1.5}$$

这与条件 (3.1.6) 有点相似, 从而第二特征场可能在一个零测集上线性退化.

考虑相应的抛物型方程组

$$\begin{cases} u_t + (u\phi(r))_x = \varepsilon u_{xx}, \\ v_t + (v\phi(r))_x = \varepsilon v_{xx} \end{cases} \tag{5.1.6}$$

带初值 (5.1.2) 的柯西问题, 有本章的主要结果:

定理 5.1.1 (1) 设初值 $(u_0(x), v_0(x))$ 有界可测, 则对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 柯西问题 (5.1.6)–(5.1.2) 的黏性解 $(u^\varepsilon(x,t), v^\varepsilon(x,t))$ 全局存在且关于黏性参数 ε 一致有界.

(2) 进一步, 若条件 (5.1.5) 成立, 则存在子列 $\{r^\varepsilon(x,t)\}$ 点点收敛于 $l(x,t)$, 其中 $r^\varepsilon(x,t) = (u^\varepsilon(x,t))^2 + (v^\varepsilon(x,t))^2$.

(3) 若 $v_0(x) \geqslant c_0 > 0$ 且 $\dfrac{u_0(x)}{v_0(x)}$ 的全变差有界或者等价地

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{u_0(x)}{v_0(x)} \right)_x \right| \mathrm{d}x \leqslant M, \tag{5.1.7}$$

其中, c_0, M 为常数, 则存在黏性解的子列 $\{(u^\varepsilon(x,t), v^\varepsilon(x,t))\}$ 点点收敛于 $(u(x,t), v(x,t))$, 且 $l(x,t) = u^2(x,t) + v^2(x,t)$, 即极限函数 $(u(x,t), v(x,t))$ 是柯西问题 (5.1.1)–(5.1.2) 的一个弱解.

注 5.1.1 因为 $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ 关于 ε 一致有界, 所以它的弱 * 极限 (u, v) 总是存在的. 然而 $(u^\varepsilon)^2 + (v^\varepsilon)^2$ 的强极限 $l(x,t)$ 不一定等于 $u(x,t)^2 + v(x,t)^2$. 如果 $l(x,t) = u(x,t)^2 + v(x,t)^2$, 那么不需要更多的条件如结论 (3) 中所给的 BV 估计, 而直接得知 (u, v) 是柯西问题 (5.1.1)–(5.1.2) 的一个弱解.

注 5.1.2 因为系统 (5.1.1) 的一个特征场线性退化, 所以条件 (5.1.7) 是必要的, 以确保黏性解 $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ 的强收敛性. 这个事实可以通过下面的实例来理解.

考虑下述线性标量方程的初值问题:

$$\begin{cases} u_t = \varepsilon u_{xx}, \\ u(x,0) = u_0^\varepsilon(x). \end{cases} \tag{5.1.8}$$

柯西问题 (5.1.8) 的解可用 Green 函数

$$G^\varepsilon(x-y,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon t}} \exp\left\{ \frac{(x-y)^2}{4\varepsilon t} \right\}$$

表示为

$$u^\varepsilon(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0^\varepsilon(y) G^\varepsilon(x-y,t) \mathrm{d}y.$$

显然只有对初值加一些额外的紧性条件, $u^\varepsilon(x,t)$ 才有可能紧.

5.2　对称系统的黏性解与弱解

为了得到黏性解的存在性, 根据定理 1.0.1, 只需得到黏性解的一致 L^∞ 界.

用 $2u$ 和 $2v$ 分别乘方程组 (5.1.6) 中第一、二个方程, 然后相加得

$$r_t + r_x\phi(r) + 2r(\phi(r))_x = \varepsilon r_{xx} - 2\varepsilon(u_x^2 + v_x^2), \tag{5.2.1}$$

从而有

$$r_t + f(r)_x \leqslant \varepsilon r_{xx}, \tag{5.2.2}$$

其中

$$f(r) = \int_0^r [\phi(s) + 2s\phi'(s)]\mathrm{d}s. \tag{5.2.3}$$

由于初值有界, 所以 $r(0,t)$ 也有界. 对 (5.2.2) 应用极值原理得

$$r = (u^\varepsilon)^2 + (v^\varepsilon)^2 \leqslant r(0,t) \leqslant N,$$

这就蕴涵着黏性解 $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ 的一致有界性及其全局存在性.

为了证得定理 5.1.1 中的第二部分即 r^ε 的强收敛性, 用试验函数 $\Phi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ 乘方程 (5.2.1), 其中, Φ 满足 $\Phi|_K = 1$, $0 \leqslant \Phi \leqslant 1$, $K \subset S = \operatorname{supp}\Phi$ 为任意给定的紧集, 有

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty 2\varepsilon[(u_x^\varepsilon)^2 + (v_x^\varepsilon)^2]\Phi \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
=& \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [\varepsilon r_{xx} - r_t - f(r)_x]\Phi \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
=& \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [\varepsilon r \phi_{xx} + r\Phi_t + f(r)\Phi_x]\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant M(\phi),
\end{aligned}$$

因而

$$\varepsilon(u_x^\varepsilon)^2 \text{ 和 } \varepsilon(v_x^\varepsilon)^2 \text{ 在 } L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \text{ 中有界.} \tag{5.2.4}$$

设 $(\eta(r), q(r))$ 为标量方程

$$r_t + \left(\int_0^r [\phi(s) + 2s\phi'(s)]\mathrm{d}s\right)_x = 0$$

的任一熵-熵流. 用 $\eta'(r)$ 乘 (5.2.1) 得

$$\begin{aligned}
\eta(r)_t + q(r)_x &= \varepsilon(\eta'(r) r_x)_x - \varepsilon\eta''(r) r_x^2 - 2\varepsilon\eta'(r)(u_x^2 + v_x^2) \\
&= I_1 - I_2 - I_3.
\end{aligned} \tag{5.2.5}$$

其中, I_1 在 $W^{-1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ 中紧; 由结论 (5.2.4), $I_2 + I_3$ 在 $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ 中有界从而对某个 $\alpha \in (1,2)$ 在 $W^{-1,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ 中紧. 注意到等式 (5.2.5) 的左端在

$W^{-1,\infty}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中有界, 利用定理 2.3.1, 有

$$\eta_i(r^\varepsilon(x,t))_t + q_i(r^\varepsilon(x,t))_x \ (i=1,2) \text{ 在 } W^{-1,2}_{\text{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+) \text{ 中紧}.$$

这里

$$\begin{aligned}(\eta_1(r), q_1(r)) &= (r-k, f(r)-f(k)),\\(\eta_2(r), q_2(r)) &= \left(f(r)-f(k), \int_k^r f'^2(s)\mathrm{d}s\right),\end{aligned}$$

k 为任意常数. 因此, 若把 r 看作独立变量, 并注意到条件 (5.1.5), 则由定理 3.1.1 的证明过程即知 $r^\varepsilon(x,t) \xrightarrow{\text{a.e.}} l(x,t)$.

最后证明定理 5.1.1 中的第三部分即 $\{u^\varepsilon(x,t), v^\varepsilon(x,t)\}$ 的点点收敛性. 由于 $v_0(x)\geqslant c_0>0$, 所以由定理 1.0.1 中的结论 (4) 即得 $v^\varepsilon(x,t)\geqslant c(t,c_0,\varepsilon)>0$.

经过简单计算, 由方程组 (5.1.6) 得

$$\begin{aligned}\left(\frac{u}{v}\right)_t + \lambda_1\left(\frac{u}{v}\right)_x &= \varepsilon\left(\frac{u}{v}\right)_{xx} - \varepsilon\left(\frac{2u}{v^3}v_x^2 - \frac{2}{v^2}u_xv_x\right)\\&= \varepsilon\left(\frac{u}{v}\right)_{xx} + \frac{2\varepsilon}{v}v_x\left(\frac{u_x}{v} - \frac{u}{v^2}v_x\right)\\&= \varepsilon\left(\frac{u}{v}\right)_{xx} + \frac{2\varepsilon}{v}v_x\left(\frac{u}{v}\right)_x.\end{aligned} \tag{5.2.6}$$

这里已略去黏性解 $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ 中的上标 ε. 因此由极值原理, $\dfrac{u^\varepsilon}{v^\varepsilon}$ 关于 ε 一致有界.

令函数 $g(\theta,\alpha)=j^\alpha * |\theta|$, 则 $g(\theta,\alpha)\in C^\infty$ 满足 $g''(\theta,\alpha)\geqslant 0$, 且当 $\alpha\to 0$ 时, $g(\theta,\alpha)\to|\theta|$, $g'(\theta,\alpha)\to \operatorname{sgn}\theta$. 在 (5.2.6) 中对 x 求导, 然后乘以函数 $g'(\theta,\alpha)$, 其中 $\theta=\left(\dfrac{u^\varepsilon}{v^\varepsilon}\right)_x$, 有

$$\begin{aligned}&g(\theta,\alpha)_t + (\lambda_1 g(\theta,\alpha))_x + [g'(\theta,\alpha)\theta - g(\theta,\alpha)]\lambda_{1x}\\&= \varepsilon g(\theta,\alpha)_{xx} - \varepsilon g''(\theta,\alpha)\theta_x^2 + \left(\frac{2\varepsilon}{v}v_x g(\theta,\alpha)\right)_x\\&\quad + \left(\frac{2\varepsilon}{v}v_x\right)_x[g'(\theta,\alpha)\theta - g(\theta,\alpha)]\end{aligned}$$

在上式中令 $\alpha\to 0$ 即得

$$|\theta|_t + (\lambda_1|\theta|)_x \leqslant \varepsilon|\theta|_{xx} + \left(\frac{2\varepsilon}{v}v_x|\theta|\right)_x \tag{5.2.7}$$

把式 (5.2.7) 的两端在 $\mathbb{R}\times[0,t]$ 上进行积分有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\theta|(x,t)\mathrm{d}x \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}|\theta|(x,0)\mathrm{d}x \leqslant M,$$

这表明 $\left\{\frac{u^\varepsilon}{v^\varepsilon}\right\}$ 的全变差一致有界, 从而存在其子列几乎处处收敛. 把这与定理 5.1.1 中的结论 (2) 相结合就得到

$$(u^\varepsilon, v^\varepsilon) \xrightarrow{\text{a.e.}} (u, v), \quad l(x,t) = u^2 + v^2.$$

显然 (u, v) 是柯西问题 (5.1.1)–(5.1.2) 的一个弱解. 于是定理 5.1.1 获证. □

评　注

定理 5.1.1 选自文献 [30]. 用补偿列紧方法对柯西问题 (5.1.1)–(5.1.2) 进行研究开始于文献 [31]. Chen[31] 最先讨论了弱解对于振动的传播和消失情况, 证明了沿真正非线性的第二特征场初值的振动会即刻消失, 但沿线性退化的第一特征场初值的振动会传播. 柯西问题 (5.1.1)–(5.1.2) 的弱解的这些性质与本章所研究的黏性解的性质相一致.

系统 (5.1.1) 的第一特征场是 Temple 型的 (见文献 [32]), 也就是说由方程 $z = C$ 确定的特征曲线在 uOv 平面上是一条直线, 其中 $z = \frac{u}{v}$ 是相应于特征值 λ_1 的黎曼不变量, C 是常数. 第 7 章将研究另外一种 Temple 型系统即 Le Roux 系统.

第 6 章　二次流系统

本章讨论二次流的非线性双曲守恒律

$$
\begin{cases} u_t + \dfrac{1}{2}(3u^2 + v^2)_x = 0, \\ v_t + (uv)_x = 0 \end{cases} \tag{6.0.1}
$$

带有界可测初值

$$
(u(x,0), v(x,0)) = (u_0(x), v_0(x)) \quad (v_0(x) \geqslant 0) \tag{6.0.2}
$$

的柯西问题广义解的存在性.

系统 (6.0.1) 是下述一般二次流系统:

$$
\begin{cases} u_t + (a_1u^2 + a_2uv + a_3v^2)_x = 0, \\ v_t + (b_1u^2 + b_2uv + b_3v^2)_x = 0 \end{cases} \tag{6.0.3}
$$

的一个特殊情形, 其中 a_i, b_i $(i = 1, 2, 3)$ 均为常数. 在原点附近, 系统 (6.0.3) 可以用来逼近任意给定的由两个方程组成的非线性系统, 如果先把非线性流函数展开成泰勒级数, 然后略去线性项与高阶小项.

令映射 $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 定义为

$$
F: (u, v) \to \left(\frac{3u^2 + v^2}{2}, uv\right),
$$

则

$$
\mathrm{d}F(u, v) = \begin{pmatrix} 3u & v \\ v & u \end{pmatrix},
$$

其特征方程为

$$
\lambda^2 - 4u\lambda + 3u^2 - v^2 = 0.
$$

于是系统 (6.0.1) 的两个特征值为

$$
\lambda_1 = 2u - s^{\frac{1}{2}}, \quad \lambda_2 = 2u + s^{\frac{1}{2}}, \tag{6.0.4}
$$

其相应的右特征向量为

$$
\boldsymbol{r}_1 = (s^{\frac{1}{2}} - u, -v)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{r}_2 = (s^{\frac{1}{2}} + u, v)^{\mathrm{T}},
$$

其中, $s=u^2+v^2$.

系统 (6.0.1) 的黎曼不变量 $w(u,v)$ 与 $z(u,v)$ 为满足

$$w_u(s^{\frac{1}{2}}-u)-vw_v=0,\quad z_u(s^{\frac{1}{2}}+u)+vw_v=0 \tag{6.0.5}$$

的函数. 方程组 (6.0.5) 的一个解为

$$w(u,v)=u+s^{\frac{1}{2}},\quad z(u,v)=u-s^{\frac{1}{2}}.$$

经过简单计算, 有

$$\nabla\lambda_1\cdot r_1=3(s^{\frac{1}{2}}-u),\quad \nabla\lambda_2\cdot r_2=3(s^{\frac{1}{2}}+u). \tag{6.0.6}$$

因此由式 (6.0.4) 知在 (0,0) 点 $\lambda_1=\lambda_2$, 从而系统 (6.0.1) 在该点非严格双曲; 而且由式 (6.0.6) 知第一、二特征场分别在 $v=0,\ u\geqslant 0$ 和 $v=0,\ u\leqslant 0$ 上线性退化.

考虑相应的抛物型方程组

$$\begin{cases} u_t+\dfrac{1}{2}(3u^2+v^2)_x=\varepsilon u_{xx}, \\ v_t+(uv)_x=\varepsilon v_{xx} \end{cases} \tag{6.0.7}$$

带光滑初值

$$(u(x,0),v(x,0))=(u_0^\varepsilon(x),v_0^\varepsilon(x))=(u_0(x),v_0(x)+\varepsilon)*j^\varepsilon \tag{6.0.8}$$

的柯西问题, 我们有本章的主要结果:

定理 6.0.1 *设初值 $(u_0(x),v_0(x))$ 有界可测且 $v_0(x)\geqslant 0$, 则对任意给定的 $\varepsilon>0$, 柯西问题 (6.0.7)–(6.0.8) 的黏性解 $(u^\varepsilon(x,t),v^\varepsilon(x,t))$ 全局存在且满足*

$$\|u^\varepsilon(x,t)\|\leqslant M,\quad 0<c(\varepsilon,t)\leqslant v^\varepsilon(x,t)\leqslant M, \tag{6.0.9}$$

其中, 常数 $M>0$ 与 ε 无关, 函数 $c(\varepsilon,t)>0$ 可能会在 $\varepsilon\to 0$ 或 $t\to\infty$ 时趋于零; 而且, 存在黏性解序列的子列 $\{(u^\varepsilon(x,t),v^\varepsilon(x,t))\}$ 几乎处处收敛于柯西问题 (6.0.1)–(6.0.2) 的一个 L^∞ 熵解 $(u(x,t),v(x,t))$.

上述定理包含两部分内容: 一是黏性解的存在性及其相应估计 (6.0.9), 其证明在 6.1 节给出; 二是黏性解序列的子列 $\{(u^\varepsilon(x,t),v^\varepsilon(x,t))\}$ 的强收敛性, 其证明在 6.2~6.4 节给出.

6.1 二次流系统的黏性解

为了得到定理 6.0.1 中第一部分的证明, 根据定理 1.0.1, 只需得到 $(u^\varepsilon(x,t),v^\varepsilon(x,t))$ 的先验 L^∞ 估计.

由于 $(u_0^\varepsilon(x), v_0^\varepsilon(x)) = (u_0(x), v_0(x) + \varepsilon) * j^\varepsilon$, 其中, j^ε 是磨光核, 所以

$$(u_0^\varepsilon(x), v_0^\varepsilon(x)) \xrightarrow{\text{a.e.}} (u_0(x), v_0(x)) \quad (\varepsilon \to 0),$$
$$\|u_0^\varepsilon(x)\|_{L^\infty} \leqslant M_1, \quad \varepsilon \leqslant v_0^\varepsilon(x) \leqslant M_1,$$

其中, 常数 $M_1 > 0$ 只依赖于初值 $(u_0(x), v_0(x))$ 的 L^∞ 范数.

经过简单计算, 有

$$w_{uu} = \frac{v^2}{s^3}, \quad w_{uv} = -\frac{uv}{s^3}, \quad w_{vv} = \frac{u^2}{s^3},$$
$$z_{uu} = -\frac{v^2}{s^3}, \quad z_{uv} = \frac{uv}{s^3}, \quad z_{vv} = -\frac{u^2}{s^3}.$$

于是 $w(u,v)$ 与 $-z(u,v)$ 均为凸函数. 由定理 4.2.1,

$$\Sigma_1 = \{(u,v) : w(u,v) \leqslant N,\ z(u,v) \geqslant -N\}$$

为系统 (6.0.7) 的一个正不变域, 其中 N 为适当大的正常数, 如图 6.1 所示. 因此我们得到一致 L^∞ 估计

$$|u^\varepsilon(x,t)| \leqslant M, \quad |v^\varepsilon(x,t)| \leqslant M$$

及黏性解的全局存在性; 而由定理 1.0.2 的结论 (4) 可得 $v^\varepsilon \geqslant c(\varepsilon, t) > 0$.

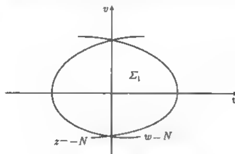


图 6.1 系统 (6.0.7) 的不变域

6.2 二次流系统的 Lax 型熵 熵流

系统 (6.0.1) 的熵-熵流 $(\eta(u,v), q(u,v))$ 为满足方程组

$$\nabla\eta(u,v) \cdot \mathrm{d}F(u,v) = \nabla q(u,v),$$

即

$$q_u = 3u\eta_u + v\eta_v, \quad q_v = v\eta_u + u\eta_v \tag{6.2.1}$$

的函数对. 从 (6.2.1) 消去 $\bar{q}$ 得熵方程

$$v(\eta_{vv} - \eta_{uu}) + 2u\eta_{uv} = 0. \tag{6.2.2}$$

由黎曼不变量的定义, 容易验证

$$\nabla w(u,v) \cdot \mathrm{d}F(u,v) = \lambda_2 \nabla w(u,v), \quad \nabla z(u,v) \cdot \mathrm{d}F(u,v) = \lambda_1 \nabla z(u,v).$$

若把系统 (6.0.1) 的熵–熵流视为变量 w, z 的函数: $\eta = \bar{\eta}(w,z)$, $\bar{q} = \bar{q}(w,z)$, 则

$$\bar{q}(w,z)_w = \lambda_2 \bar{\eta}(w,z)_w, \quad \bar{q}(w,z)_z = \lambda_1 \bar{\eta}(w,z)_z. \tag{6.2.3}$$

从 (6.2.3) 消去 $\bar{q}$ 得

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\bar{\eta}(w,z)_{wz} + \lambda_{2z}\bar{\eta}(w,z)_w - \lambda_{1w}\bar{\eta}(w,z)_z = 0. \tag{6.2.4}$$

注意到

$$\lambda_1 = 2u - s^{\frac{1}{2}} = w + z - \frac{w-z}{2} = \frac{w+3z}{2},$$

$$\lambda_2 = 2u + s^{\frac{1}{2}} = w + z + \frac{w-z}{2} = \frac{3w+z}{2},$$

即得下述形式的熵方程

$$\bar{\eta}(w,z)_{wz} + \frac{1}{2(w-z)}[\bar{\eta}(w,z)_w - \bar{\eta}(w,z)_z] = 0. \tag{6.2.5}$$

作从 (u,v) 到 (u,s) 的变量变换, 令

$$\bar{\eta}(u,v) = \eta(u,s), \quad \bar{q}(u,v) = q(u,s),$$

则由链式法则有

$$\bar{\eta}_u = \eta_u + 2u\eta_s, \quad \bar{\eta}_v = 2v\eta_s, \quad \bar{\eta}_{vv} = 4v^2\eta_{ss} + 2\eta_s,$$

$$\bar{\eta}_{uv} = 4uv\eta_{ss} + 2v\eta_{us}, \quad \bar{\eta}_{uu} = 4u^2\eta_{ss} + 2\eta_s + 4u\eta_{us} + \eta_{uu}.$$

于是熵方程 (6.2.2) 变为简单的方程:

$$\eta_{ss} = \frac{1}{4s}\eta_{uu}. \tag{6.2.6}$$

由式 (6.2.1) 得

$$\begin{cases} 2uq_s + q_u \quad 3u(2u\eta_s + \eta_u) + 2v^2\eta_s, \\ 2vq_s = v(2u\eta_s + \eta_u) + 2uv\eta_s, \end{cases}$$

因而相应于熵 η 的熵流 q 满足

$$q_u = 2u\eta_u + 2s\eta_s. \tag{6.2.7}$$

若函数 $\eta = h(s)e^{ku}$ $(k \in \mathbb{Z}^+)$ 为方程 (6.2.6) 的解, 则

$$h''(s) - \frac{k^2}{4s}h(s) = 0.$$

令 $a(s) = s^{\frac{1}{4}}$, $r = ks^{\frac{1}{2}}$, $h(s) = a(s)\phi(r)$, 则直接的计算表明

$$\phi''(r) - \left(1 + \frac{3}{4r^2}\right)\phi(r) = 0. \tag{6.2.8}$$

这是经典的 Fuchsian 方程.

方程 (6.2.8) 具有一个下述级数形式的解:

$$\phi_1(r) = r^{\frac{3}{2}}\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^{2n} = r^{\frac{3}{2}}g(r), \tag{6.2.9}$$

其中, 系数 c_0 为任意正常数, c_n 满足

$$c_n = \frac{c_{n-1}}{\left(\frac{3}{2} + 2n\right)\left(\frac{1}{2} + 2n\right) - \frac{3}{4}}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

于是由二阶线性常微分方程理论知

$$\phi_2(r) = \phi_1(r)\int_r^{\infty} \frac{1}{\phi_1^2(r)}\mathrm{d}r = r^{\frac{3}{2}}g(r)\int_r^{\infty} \frac{1}{r^3 g^2(r)}\mathrm{d}r \tag{6.2.10}$$

为方程 (6.2.8) 的一个与 $\phi_1(r)$ 线性无关的解.

若 $\eta_k = a(s)\phi(r)e^{ku}$, 则由 (6.2.7) 得

$$(q_k)_u = 2ku\eta_k + \left(\frac{1}{2} + r\frac{\phi'(r)}{\phi(r)}\right)\eta_k,$$

从而相应于熵 η_k 的一个熵流 q_k 为

$$q_k = \eta_k\left(2u + s^{\frac{1}{2}} + \frac{r}{k}\left(\frac{\phi'(r)}{\phi(r)} - 1\right) - \frac{3}{2k}\right).$$

令 $\eta_{-k} = a(s)\phi(r)e^{-ku}$, 则由 (6.2.7), 相应于熵 η_{-k} 的一个熵流 q_{-k} 为

$$q_{-k} = \eta_{-k}\left(2u - s^{\frac{1}{2}} - \frac{r}{k}\left(\frac{\phi'(r)}{\phi(r)} - 1\right) + \frac{3}{2k}\right).$$

关于 Fuchsian 方程

$$\phi''(r) - \left(1 + \frac{c}{r^2}\right)\phi(r) = 0 \quad (c \in \mathbb{R}) \tag{6.2.11}$$

的两个解 $\phi_1(r)$ 和 $\phi_2(r)$ 在无穷远处的性态, 有下述引理.

引理 6.2.1　若对任何 $r>0$ 有 $\phi_1(r)>0$, $\phi_1'(r)>0$, 则

$$\frac{\phi_1'(r)}{\phi_1(r)}=1+O\left(\frac{1}{r^2}\right),\quad c_1\phi_1(r)\mathrm{e}^{-r}=1+O\left(\frac{1}{r}\right)\quad(r\to\infty);\tag{6.2.12}$$

若对任何 $r>0$ 有 $\phi_2(r)>0$, $\phi_2'(r)<0$, 则

$$\frac{\phi_2'(r)}{\phi_2(r)}=-1+O\left(\frac{1}{r^2}\right),\quad c_2\phi_2(r)\mathrm{e}^{r}=1+O\left(\frac{1}{r}\right)\quad(r\to\infty),\tag{6.2.13}$$

其中, c_1 与 c_2 是适当的正常数.

证明　因为 $\phi''(r)=\left(1+\frac{c}{r^2}\right)\phi(r)$, 所以若 $\phi_1(r)>0,\phi_1'(r)>0$, 则 $\phi_1(r)$ 和 $\phi_1'(r)$ 都在 r 趋于无穷时趋于无穷; 若 $\phi_2(r)>0$, $\phi_2'(r)<0$, 则 $\phi_2(r)$ 和 $\phi_2'(r)$ 都在 r 趋于无穷时趋于零. 因此由 L'Hospital 法则得

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\phi'(r)}{\phi(r)}=\lim_{r\to\infty}\frac{\phi''(r)}{\phi'(r)}=\lim_{r\to\infty}\frac{\left(1+\frac{c}{r^2}\right)\phi(r)}{\phi'(r)},$$

从而

$$\lim_{r\to\infty}\left(\frac{\phi'(r)}{\phi(r)}\right)^2=1,$$

于是

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\phi_1'(r)}{\phi_1(r)}=1,\quad \lim_{r\to\infty}\frac{\phi_2'(r)}{\phi_2(r)}=-1.\tag{6.2.14}$$

由于方程 (6.2.11) 可变形为

$$\left(\frac{\phi'(r)}{\phi(r)}\right)'+\left(\frac{\phi'(r)}{\phi(r)}\right)^2=1+\frac{c}{r^2},\tag{6.2.15}$$

所以令 $y=\dfrac{\phi_1'(r)}{\phi_1(r)}-1$, 则 y 满足

$$y'+\left(1+\frac{\phi_1'(r)}{\phi_1(r)}\right)y=\frac{c}{r^2}.$$

上式两端乘以 $\mathrm{e}^{\int_d^r\left(\frac{\phi_1'(t)}{\phi_1(t)}+1\right)\mathrm{d}t}$ 再从 d 到 r 积分有

$$\mathrm{e}^{\int_d^r\left(\frac{\phi_1'(t)}{\phi_1(t)}+1\right)\mathrm{d}t}y(r)-y(d)=\int_d^r\mathrm{e}^{\int_d^\tau\left(\frac{\phi_1'(t)}{\phi_1(t)}+1\right)\mathrm{d}t}\frac{c}{\tau^2}\mathrm{d}\tau.$$

这蕴涵着

$$\frac{\phi_1(r)}{\phi_1(d)}\mathrm{e}^{r-d}y(r)-y(d)=\int_d^r\frac{\phi_1(\tau)}{\phi_1(d)}\mathrm{e}^{\tau-d}\frac{c}{\tau^2}\mathrm{d}\tau,$$

因而

$$y(r)=\frac{\phi_1(d)}{\phi_1(r)}\mathrm{e}^{d-r}y(d)+\int_d^r\frac{\phi_1(\tau)}{\phi_1(r)}\mathrm{e}^{\tau-r}\frac{c}{\tau^2}\mathrm{d}\tau. \tag{6.2.16}$$

取 $d=\frac{1}{2}r$, 则 $\phi_1(d)<\phi_1(r)$, $\phi_1(\tau)<\phi_1(r)$, 因为 $\phi_1'(r)>0$.

由式 (6.2.14) 知 y 有界, 所以从式 (6.2.16) 可推出

$$|y(r)|\leqslant M\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r}+\frac{4|c|}{r^2}(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r}),$$

其中, M 是 y 的一个界. 因此

$$y(r)=O\left(\frac{1}{r^2}\right)\quad(r\to\infty).$$

类似地, 令 $z=\dfrac{\phi_2'(r)}{\phi_2(r)}+1$, 则由方程 (6.2.15) 得

$$z'+\left(\frac{\phi_2'(r)}{\phi_2(r)}-1\right)z=\frac{c}{r^2}.$$

上式两端乘以 $\mathrm{e}^{\int_d^r\left(\frac{\phi_2'(t)}{\phi_2(t)}-1\right)\mathrm{d}t}$ 再从 d 到 r 积分有

$$z(r)=\frac{\phi_2(d)}{\phi_2(r)}\mathrm{e}^{r-d}z(d)-\int_r^d\frac{\phi_2(\tau)}{\phi_2(r)}\mathrm{e}^{r-\tau}\frac{c}{\tau^2}\mathrm{d}\tau.$$

取 $d=2r$, 则显然 $\phi_2(d)<\phi_2(r)$, $\phi_2(\tau)<\phi_2(r)$, 因为 $\phi_2'<0$. 于是

$$|z(r)|\leqslant M\mathrm{e}^{-r}+\frac{|c|}{r^2}(1-\mathrm{e}^{-r}),$$

这蕴涵着

$$z(r)=O\left(\frac{1}{r^2}\right)\quad(r\to\infty).$$

至此证明了式 (6.2.12) 与 (6.2.13) 中的第一部分, 现在证明剩余的两个估计式.

令 $\phi_1(r)=a(r)\mathrm{e}^r$, 则

$$\frac{a'(r)}{a(r)}=y(r)=O\left(\frac{1}{r^2}\right)\quad(r\to\infty),$$

因而对固定的 $r_1>0$ 有

$$a(r)=a(r_1)\mathrm{e}^{\int_{r_1}^r y(r)\mathrm{d}r}. \tag{6.2.17}$$

因为 $y(r)=O\left(\dfrac{1}{r^2}\right)$ $(r\to\infty)$, 所以极限 $\lim\limits_{r\to\infty}a(r)$ 存在, 从而在式 (6.2.17) 中令 $r_1\to\infty$ 得

$$\begin{aligned}a(r)&=a(\infty)\mathrm{e}^{-\int_r^\infty y(r)\mathrm{d}r}\\&=a(\infty)+a(\infty)\left(\mathrm{e}^{-\int_r^\infty y(r)\mathrm{d}r}-1\right).\end{aligned}$$

注意到 $\int_r^\infty y(r)\mathrm{d}r = O\left(\frac{1}{r}\right)$ $(r \to \infty)$, 对 $\mathrm{e}^{-\int_r^\infty y(r)\mathrm{d}r} - 1$ 进行泰勒展开, 有

$$a(r) = a(\infty) + O\left(\frac{1}{r}\right) \quad (r \to \infty).$$

类似地, 令 $\phi_2(r) = b(r)\mathrm{e}^{-r}$, 则

$$\frac{b'(r)}{b(r)} = z(r).$$

因为 $z(r) = O\left(\frac{1}{r^2}\right)$ $(r \to \infty)$, 所以

$$b(r) = b(\infty) + O\left(\frac{1}{r}\right) \quad (r \to \infty).$$

证毕. □

显然, 分别由式 (6.2.9) 和 (6.2.10) 给出的 $\phi_1(r), \phi_2(r)$ 满足: $\phi_1(r) > 0$, $\phi_1'(r) > 0$ 以及 $\phi_2(r) > 0$ 对所有的 $r > 0$ 成立. 从 $\phi_2''(r)$ 恒正可知 $\phi_2'(r) < 0$, 因为 $\lim\limits_{r\to\infty} \phi_2(r) = 0$, $\lim\limits_{r\to\infty} \phi_2'(r) = 0$.

利用引理 6.2.1 中的估计有

$$\eta_k^1 = a(s)\phi_1(r)\mathrm{e}^{ku} = \mathrm{e}^{kw}\left(a(s) + O\left(\frac{1}{r}\right)\right) = \mathrm{e}^{kw}\left(a(s) + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \tag{6.2.18}$$

在 $s > 0$ 的任意紧子集上成立, 因为 $r = ks^{\frac{1}{2}}$;

$$q_k^1 = \eta_k^1\left(2u + s^{\frac{1}{2}} + \frac{r}{k}\left(\frac{\phi_1'(r)}{\phi_1(r)} - 1\right) - \frac{3}{2k}\right) = \eta_k^1\left(\lambda_2 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \tag{6.2.19}$$

对 $s \geqslant 0$ 成立, 因为 $ry(r) = r\left(\frac{\phi_1'(r)}{\phi_1(r)} - 1\right)$ 一致有界; 而且在 $s > 0$ 的任意紧子集上有

$$q_k^1 = \eta_k^1\left(\lambda_2 - \frac{3}{2k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right). \tag{6.2.20}$$

同理

$$\eta_{-k}^1 = a(s)\phi_1(r)\mathrm{e}^{\ ku} = \mathrm{e}^{-kz}\left(a(s) + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \tag{6.2.21}$$

在 $s > 0$ 的任意紧子集上成立,

$$q^1{}_k = \eta_{-k}^1\left(\lambda_1 - \frac{r}{k}\left(\frac{\phi_1'(r)}{\phi_1(r)} - 1\right) + \frac{3}{2k}\right) = \eta_{-k}^1\left(\lambda_1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \tag{6.2.22}$$

对 $s \geqslant 0$ 成立, 且在 $s > 0$ 的任意紧子集上有

$$q_{-k}^1 = \eta_{-k}^1\left(\lambda_1 + \frac{3}{2k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right); \tag{6.2.23}$$

$$\eta_k^2 = a(s)\phi_2(r)e^{ku} = e^{kz}\left(a(s) + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \tag{6.2.24}$$

在 $s>0$ 的任意紧子集上成立,

$$q_k^2 = \eta_k^2\left(\lambda_1 + \frac{r}{k}\left(\frac{\phi_2'(r)}{\phi_2(r)} + 1\right) - \frac{3}{2k}\right) = \eta_k^2\left(\lambda_1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \tag{6.2.25}$$

对 $s \geqslant 0$ 成立, 且在 $s>0$ 的任意紧子集上有

$$q_k^2 = \eta_k^2\left(\lambda_1 - \frac{3}{2k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right); \tag{6.2.26}$$

$$\eta_{-k}^2 = a(s)\phi_2(r)e^{-ku} = e^{-kw}\left(a(s) + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \tag{6.2.27}$$

在 $s>0$ 的任意紧子集上成立,

$$q_{-k}^2 = \eta_{-k}^2\left(\lambda_2 - \frac{r}{k}\left(\frac{\phi_2'(r)}{\phi_2(r)} + 1\right) + \frac{3}{2k}\right) = \eta_{-k}^2\left(\lambda_2 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \tag{6.2.28}$$

对 $s \geqslant 0$ 成立, 且在 $s>0$ 的任意紧子集上有

$$q_{-k}^2 = \eta_{-k}^2\left(\lambda_2 + \frac{3}{2k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right). \tag{6.2.29}$$

上述关于熵-熵流的估计 (6.2.18)~(6.2.29) 将用来证明从属于黏性解序列的 Young 测度是 Dirac 测度.

6.3 熵-熵流的 $H_{\rm loc}^{-1}$ 紧性

本节验证 6.2 节构造的四族 Lax 型熵-熵流均满足 $H_{\rm loc}^{-1}$ 紧性.

定理 6.3.1 *对任何在 6.2 节给出的 Lax 型熵-熵流 (η, q) 有 $\eta(u^\varepsilon, v^\varepsilon)_t + q(u^\varepsilon, v^\varepsilon)_x$ 在 $H_{\rm loc}^{-1}$ 中紧, 其中 $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ 为柯西问题 (6.0.7) (6.0.8) 唯一确定的黏性解.*

证明 为了简单起见, 略去黏性解 $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ 中的上标 ε.

显然系统 (6.0.1) 有个严格凸熵 $\eta^* = \dfrac{u^2+v^2}{2}$ 及其相应的熵流 $q^* = u^3 + uv^2$. 分别用 u 和 v 乘以方程组 (6.0.7) 中的第一、二个方程, 然后相加得

$$\eta_t^* + q_x^* = \varepsilon\eta_{xx}^* - \varepsilon(\eta_{uu}^* u_x^2 + 2\eta_{uv}^* u_x v_x + \eta_{vv}^* v_x^2) = \varepsilon\eta_{xx}^* - \varepsilon(u_x^2 + v_x^2).$$

运用证得结论 (5.1.4) 的相同技巧, 有

$$\varepsilon(u_x^\varepsilon)^2 \text{ 和 } \varepsilon(v_x^\varepsilon)^2 \text{ 在 } L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+) \text{ 中有界}. \tag{6.3.1}$$

容易看出, 在 6.2 节构造的与函数 $\phi_1(r)$ 相关的第一类 Lax 型熵 $\eta^1_{\pm k}$ 是 (u,v) 的光滑函数. 事实上,

$$\eta^1_{\pm k} = k^{\frac{3}{2}} s\sum_{n=0}^{\infty} c_n(k^2 s)^n \mathrm{e}^{\pm ku},$$

所以利用 (6.3.1), 易证 $\eta^1_{\pm k}(u^\varepsilon,v^\varepsilon)_t + q^1_{\pm k}(u^\varepsilon,v^\varepsilon)_x$ 在 H^{-1}_{loc} 中紧

然而与函数 $\phi_2(r)$ 相关的第二类 Lax 型熵 $\eta^2_{\pm k}$ 的二阶导数在点 $(u,v)=(0,0)$ 奇异. 注意到

$$\eta^2_{\pm k} = k^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\pm ku} r^2 g(r)\int_r^\infty \frac{1}{r^3 g^2(r)}\mathrm{d}r,$$

而

$$\int_r^\infty (r^3 g^2(r))^{-1}\mathrm{d}r = O\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad (r\to 0),$$

故由 (6.2.24)~(6.2.29) 知 $\eta^2_{\pm k}$ 和 $q^2_{\pm k}$ 对固定的 $k>0$ 一致有界. 此外, 由分部积分法得

$$\begin{aligned}\eta^2_{\pm k} &= k^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\pm ku} r^2 g(r)\int_r^\infty \frac{1}{r^3 g^2(r)}\mathrm{d}r\\ &= k^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\pm ku}\left(\frac{1}{2g(r)} - r^2 g(r)\int_r^\infty \frac{g'(r)}{r^2 g^3(r)}\mathrm{d}r\right).\end{aligned}$$

由于

$$g'(r) = \sum_{n=1}^\infty 2nc_n r^{2n-1} \leqslant \sum_{n=1}^\infty c_{n-1} r^{2n-1} = rg(r),$$

所以

$$r^2 g(r)\int_r^\infty \frac{g'(r)}{r^2 g^3(r)}\mathrm{d}r = O(r^2\ln r) \quad (r\to 0). \tag{6.3.2}$$

这表明对固定的 $k>0$, $\eta^2_{\pm k}$ 的一阶导数一致有界. 易见 $\eta^2_{\pm k}$ 中的第一项 $I_1 = k^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\pm ku}\cdot\dfrac{1}{2g(r)}$ 光滑, 从而它的二阶导数有界; 但 $\eta^2_{\pm k}$ 中的第二项

$$I_2 = r^2 I = -k^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\pm ku} r^2 g(r)\int_r^\infty \frac{g'(r)}{r^2 g^3(r)}\mathrm{d}r$$

的二阶导数在点 $(0,0)$ 出现奇性. 由式 (6.3.2), I_2 的二阶导数中除了两项 $(r^2)_{uu}I$, $(r^2)_{vv}I = 2k^2 I$ 外的每一项都有界, 但这两项非正.

因此用 $\nabla\eta_{\pm k}^2$ 乘方程组 (6.0.7) 有

$$
\begin{aligned}
&(\eta_{\pm k}^2)_t + (q_{\pm k}^2)_x \\
=&\varepsilon(\eta_{\pm k}^2)_{xx} - \varepsilon\left[(\eta_{\pm k}^2)_{uu}u_x^2 + 2(\eta_{\pm k}^2)_{uv}u_xv_x + (\eta_{\pm k}^2)_{vv}v_x^2\right] \\
=&\varepsilon(\eta_{\pm k}^2)_{xx} - \varepsilon\left[A(u,v)u_x^2 + B(u,v)u_xv_x + C(u,v)v_x^2\right] \\
&-2k^2\varepsilon I(u_x^2+v_x^2),
\end{aligned}
\tag{6.3.3}
$$

其中, $A(u,v)$, $B(u,v)$ 和 $C(u,v)$ 是 $\eta_{\pm k}^2$ 的二阶导数中的正则项.

设 $K\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ 为任一紧集, 选取 $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 使得 $\phi_K=1$, $0\leqslant\phi\leqslant 1$. 用 ϕ 乘 (6.3.3) 并在 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ 上积分得

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty 2\varepsilon k^2|I|(u_x^2+v_x^2)\phi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
=&\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty \varepsilon\left[A(u,v)u_x^2 + B(u,v)u_xv_x + C(u,v)v_x^2\right]\phi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&-\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty\left(\eta_{\pm k}^2\phi_t + q_{\pm k}^2\phi_x + \varepsilon\eta_{\pm k}^2\phi_{xx}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant M(\phi),
\end{aligned}
$$

其中最后一个不等式是因为黏性解的一致有界性以及正则部分 $A(u,v)u_x^2+B(u,v)u_xv_x+C(u,v)v_x^2$ 的 L_{loc}^1 有界性.

现在回到式 (6.3.3), 就有

$$
\varepsilon\left[(\eta_{\pm k}^2)_{uu}u_x^2 + 2(\eta_{\pm k}^2)_{uv}u_xv_x + (\eta_{\pm k}^2)_{vv}v_x^2\right]
$$

在 $L_{\mathrm{loc}}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中有界从而对某个指数 $\alpha\in(1,2)$ 在 $W_{\mathrm{loc}}^{-1,\alpha}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中紧. 显然 $\varepsilon(\eta_{\pm k}^2)_{xx}$ 在 $W_{\mathrm{loc}}^{-1,2}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中紧, 因为 $\eta_{\pm k}^2$ 的一阶导数有界. 又因 $(\eta_{\pm k}^2)_t+(q_{\pm k}^2)_x$ 在 $W^{-1,\infty}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中有界, 故由定理 2.3.1 就得到 $(\eta_{\pm k}^2)_t+(q_{\pm k}^2)_x$ 的 H_{loc}^{-1} 紧性. 证毕. □

6.4 Young 测度的归约

本节将证明从属于柯西问题 (6.0.7)-(6.0.8) 的黏性解序列 $\{(u^\varepsilon,v^\varepsilon)\}$ 的一族正测度 $\nu_{x,t}$ 是 Dirac 测度. 然后, 应用推论 2.1.2 就得到

$$
(u^\varepsilon(x,t),v^\varepsilon(x,t))\xrightarrow{\text{a.e.}}(u(x,t),v(x,t))\quad(\varepsilon\to 0).
$$

这说明 $(u(x,t),v(x,t))$ 是柯西问题 (6.0.1)-(6.0.2) 的一个弱解.

因为黏性解序列 $\{(u^\varepsilon(x,t),v^\varepsilon(x,t))\}$ 一致有界, 所以根据定理 2.1.1, 只需考虑一族具有紧支集的概率测度 $\nu_{x,t}$. 不失一般性, 可以固定 $(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ 而只考虑一个测度 ν.

对于系统 (6.0.1) 的任意满足 H_{loc}^{-1} 紧性的熵-熵流 (η_i, q_i) $(i=1,2)$, 应用定理 2.2.2 有

$$\begin{aligned}
&\overline{\eta_1(u^\varepsilon,v^\varepsilon)}\ \overline{q_2(u^\varepsilon,v^\varepsilon)}-\overline{\eta_2(u^\varepsilon,v^\varepsilon)}\ \overline{q_1(u^\varepsilon,v^\varepsilon)}\\
=&\overline{\eta_1(u^\varepsilon,v^\varepsilon)q_2(u^\varepsilon,v^\varepsilon)-\eta_2(u^\varepsilon,v^\varepsilon)q_1(u^\varepsilon,v^\varepsilon)}.
\end{aligned}$$

于是由 Young 测度表示定理即得下述测度方程:

$$\langle\nu,\eta_1\rangle\langle\nu,q_2\rangle-\langle\nu,\eta_2\rangle\langle\nu,q_1\rangle=\langle\nu,\eta_1q_2-\eta_2q_1\rangle. \tag{6.4.1}$$

记 Q 为 ν 的最小特征矩形:

$$Q=\{(u,v):w_-\leqslant w(u,v)\leqslant w_+,z_-\leqslant z(u,v)\leqslant z_+,v\geqslant 0\}.$$

下面证明 ν 的支集 $\mathrm{supp}\,\nu$ 只包含点 $(0,0)$ 或另外一点 (u^*,v^*).

假设 $\mathrm{supp}\,\nu$ 不是独点集 $\{(0,0)\}$, 则

$$\langle\nu,\eta_k^1\rangle>0,\quad\langle\nu,\eta_{-k}^2\rangle>0,$$

其中, η_k^1,η_{-k}^2 分别由式 (6.2.18) 和 (6.2.27) 给出. 下面介绍两族定义在 Q 上的新概率测度 $\mu_k^\pm$:

$$\langle\mu_k^+,h\rangle=\frac{\langle\nu,h\eta_k^1\rangle}{\langle\nu,\eta_k^1\rangle},\quad\langle\mu_k^-,h\rangle=\frac{\langle\nu,h\eta_{-k}^2\rangle}{\langle\nu,\eta_{-k}^2\rangle},$$

其中, $h=h(u,v)$ 为任一连续函数. 易见 μ_k^+ 和 μ_k^- 关于 k 一致有界, 所以根据 L^∞ 空间的弱 $*$ 紧性, 存在 Q 上的概率测度 $\mu^\pm$ 使得 $\langle\mu^\pm,h\rangle=\lim\limits_{k\to\infty}\langle\mu_k^\pm,h\rangle$ 对 $\{\mu_k^\pm\}$ 的某个子列成立, 而且

$$\mathrm{supp}\,\mu^+=Q\cap\{(u,v):w=w_+\}, \tag{6.4.2}$$

$$\mathrm{supp}\,\mu^-=Q\cap\{(u,v):w=w_-\}. \tag{6.4.3}$$

事实上, 对任何满足

$$\mathrm{supp}\,h(u)\subset Q\cap\{(u,v):w\leqslant w_0\}$$

的函数 $h(u,v)\in C(Q)$, 其中 $w_0\in[w_-,w_+)$ 为任意给定的常数, 我们有

$$\begin{aligned}
\frac{|\langle\nu,h\eta_k\rangle|}{|\langle\nu,\eta_k\rangle|}&=\frac{|\langle\nu,h\mathrm{e}^{ku}\rangle|}{|\langle\nu,\mathrm{e}^{ku}\rangle|}\\
&\leqslant\frac{c_1\mathrm{e}^{k(w_0+\delta}}{c_2\mathrm{e}^{k(w_+-\delta)}}=\frac{c_1}{c_2}\mathrm{e}^{k(w_0+2\delta-w_+)}\to 0\quad(k\to\infty),
\end{aligned}$$

其中, c_1, c_2 为两个适当大小的正常数, $\delta>0$ 满足 $2\delta<w_+-w_0$, 这是因为 Q 是 ν 的最小特征矩形. 这就证明了等式 (6.4.2). 同理可证等式 (6.4.3).

在方程 (6.4.1) 中令 $(\eta_1, q_1) = (\eta_k^1, q_k^1)$, 则

$$\langle \nu, q_2 \rangle - \langle \nu, \eta_2 \rangle \frac{\langle \nu, q_k^1 \rangle}{\langle \nu, \eta_k^1 \rangle} = \frac{\langle \nu, \eta_k^1 q_2 - \eta_2 q_k^1 \rangle}{\langle \nu, \eta_k^1 \rangle}. \tag{6.4.4}$$

注意到 η_k^1 与 q_k^1 的关系式 (6.2.19), 在式 (6.4.4) 中令 $k \to \infty$ 有

$$\langle \nu, q_2 \rangle - \langle \nu, \eta_2 \rangle \langle \mu^+, \lambda_2 \rangle = \langle \mu^+, q_2 - \lambda_2 \eta_2 \rangle. \tag{6.4.5}$$

类似地, 在方程 (6.4.1) 中令 $(\eta_1, q_1) = (\eta_{-k}^2, q_{-k}^2)$, 然后令 $k \to \infty$ 有

$$\langle \nu, q_2 \rangle - \langle \nu, \eta_2 \rangle \langle \mu^-, \lambda_1 \rangle = \langle \mu^-, q_2 - \lambda_2 \eta_2 \rangle. \tag{6.4.6}$$

再在方程 (6.4.1) 中令 $(\eta_1, q_1) = (\eta_k^1, q_k^1)$ 及 $(\eta_2, q_2) = (\eta_{-k}^2, q_{-k}^2)$, 则

$$\frac{\langle \nu, q_{-k}^2 \rangle}{\langle \nu, \eta_{-k}^2 \rangle} - \frac{\langle \nu, q_k^1 \rangle}{\langle \nu, \eta_k^1 \rangle} = \frac{\langle \nu, \eta_k^1 q_{-k}^2 - \eta_{-k}^2 q_k^1 \rangle}{\langle \nu, \eta_{-k}^2 \rangle \langle \nu, \eta_k^1 \rangle}. \tag{6.4.7}$$

现在证明 $w_- = w_+$. 若不然, 可选取 $\delta_0 > 0$ 使得 $2\delta_0 < w_+ - w_-$, 则

$$\langle \nu, \eta_{-k}^2 \rangle \geqslant c_1 e^{-k(w_- + \delta_0)}, \quad \langle \nu, \eta_k^1 \rangle \geqslant c_2 e^{k(w_+ - \delta_0)}$$

对两个适当大小的正常数 c_1, c_2 成立, 因而由式 (6.2.18), (6.2.19) 以及 (6.2.27), (6.2.28) 得

$$\frac{\langle \nu, \eta_k^1 q_{-k}^2 - \eta_{-k}^2 q_k^1 \rangle}{\langle \nu, \eta_{-k}^2 \rangle \langle \nu, \eta_k^1 \rangle} = O\left(\frac{1}{k}\right) e^{-k(w_+ - w_- - 2\delta_0)} \to 0 \quad (k \to \infty).$$

于是在等式 (6.4.7) 中令 $k \to \infty$ 就有 $\langle \mu^+, \lambda_2 \rangle = \langle \mu^-, \lambda_2 \rangle$. 把这与式 (6.4.5), (6.4.6) 相结合即可得到下述关系式:

$$\langle \mu^+, q - \lambda_2 \eta \rangle = \langle \mu^-, q - \lambda_2 \eta \rangle \tag{6.4.8}$$

对任意满足 $\eta_t + q_x$ 在 H_{loc}^{-1} 中紧的熵 熵流 (η, q) 成立.

在等式 (6.4.8) 中令 $(\eta, q) = (\eta_{-k}^2, q_{-k}^2)$, 则由式 (6.4.2) 和 (6.4.3) 得

$$|\langle \mu^+, q - \lambda_2 \eta \rangle| \geqslant \frac{c_1}{k} e^{-k(w_+ - \delta_0)}, \tag{6.4.9}$$

$$|\langle \mu^-, q - \lambda_2 \eta \rangle| \leqslant \frac{c_2}{k} e^{-k(w_- + \delta_0)}, \tag{6.4.10}$$

其中, c_1, c_2 为正常数. 这不可能, 所以 $w_+ = w_-$.

类似于上面的证明, 我们可用熵-熵流 (η_k^2, q_k^2) 和 (η_{-k}^1, q_{-k}^1) 证得 $z_+ = z_-$. 因此 ν 集中于点 $(0, 0)$ 或另外一点 (u^*, v^*). 这就完成了定理 6.0.1 的证明. □

评　注

一般二次流的非严格双曲守恒律 (6.0.3) 的黎曼解曾由 Issacson, Marchesin, Paes-Leme, Plohr, Schaeffer, Shearer, Temple 等在相关文献中给出, 请读者参阅文献 [33~35].

Lu 和 Wang 在文献 [36] 中研究了系统

$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{2}(au^2 + v^2)_x = 0, \\ v_t + (uv)_x = 0 \end{cases}$$

在 $a > 2$ 的情形下元波的相互作用.

Lu[37] 得到了柯西问题 (6.0.1)–(6.0.2) 的整体弱解的存在性. 本章的内容选自文献 [22, 37]. 6.2 节中构造的熵与奇点 (0,0) 相容, 因而简化了定理 6.0.1 的证明. Kan[38] 独立地给出了另外一个证明, 他的证明基于构造系统 (6.0.1) 避开奇点 $(0,0)$ 的熵 $\eta(u,v)$. 这一思想后来被 Chen 和 Kan 在文献 [39] 中用于研究更为一般的二次流系统 (6.0.3) 的 L^∞ 解.

第 7 章　Le Roux 系统

本章将用第 6 章介绍的方法研究非线性双曲守恒律

$$\begin{cases} u_t + (u^2 + v)_x = 0, \\ v_t + (uv)_x = 0 \end{cases} \tag{7.0.1}$$

带可测初值

$$(u(x,0), v(x,0)) = (u_0(x), v_0(x)) \quad (v_0(x) \geqslant 0) \tag{7.0.2}$$

的柯西问题整体弱解的存在性. 系统 (7.0.1) 最先由 Le Roux[40] 作为一个数学模型导出, 所以称为 Le Roux 系统.

设映射 $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 定义如下:

$$F : (u, v) \to (u^2 + v, uv),$$

则

$$\mathrm{d}F(u, v) = \begin{pmatrix} 2u & 1 \\ v & \text{[illegible]} \end{pmatrix},$$

其特征方程为

$$\lambda^2 - 3u\lambda + 2u^2 - v = 0.$$

于是系统 (7.0.1) 的两个特征值为

$$\lambda_1 = \frac{3u}{2} - \frac{D}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{3u}{2} + \frac{D}{2}, \tag{7.0.3}$$

其相应的右特征向量为

$$r_1 = \left(-1, \frac{u + D}{2}\right)^{\mathrm{T}}, \quad r_2 = \left(1, \frac{-u + D}{2}\right)^{\mathrm{T}},$$

其中, $D = (u^2 + 4v)^{\frac{1}{2}}$.

系统 (7.0.1) 黎曼不变量 $w(u, v)$ 与 $z(u, v)$ 为满足

$$w_u - w_v \frac{u + D}{2} = 0, \quad z_u - z_v \frac{u - D}{2} = 0 \tag{7.0.4}$$

的函数. 方程组 (7.0.4) 的一个解为

$$w(u, v) = u + D, \quad z(u, v) = u - D.$$

经过简单计算, 有

$$\nabla\lambda_1 \cdot r_1 = \left(\frac{3}{2} - \frac{u}{2D}, -\frac{1}{D}\right)\left(-1, \frac{u+D}{2}\right)^{\mathrm{T}} = -2, \tag{7.0.5}$$

$$\nabla\lambda_2 \cdot r_2 = \left(\frac{3}{2} + \frac{u}{2D}, \frac{1}{D}\right)\left(1, \frac{-u+D}{2}\right)^{\mathrm{T}} = 2. \tag{7.0.6}$$

因此, 如果考虑 uOv 平面的上半平面 $(v \geqslant 0)$ 内的有界解, 那么由式 (7.0.3) 知在 $(0,0)$ 点 $\lambda_1 = \lambda_2$, 从而系统 (7.0.1) 在该点非严格双曲; 由式 (7.0.5), (7.0.6) 知系统 (7.0.1) 的两个特征场都是真正非线性的.

考虑相应的抛物型方程组

$$\begin{cases} u_t + (u^2 + v)_x = \varepsilon u_{xx}, \\ v_t + (uv)_x = \varepsilon v_{xx} \end{cases} \tag{7.0.7}$$

带光滑初值

$$(u(x,0), v(x,0)) = (u_0^\varepsilon(x), v_0^\varepsilon(x)) = (u_0(x), v_0(x) + \varepsilon) * j^\varepsilon \tag{7.0.8}$$

的柯西问题, 有本章的主要结果:

定理 7.0.1　*设初值 $(u_0(x), v_0(x))$ 有界可测且 $v_0(x) \geqslant 0$, 则对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 柯西问题 (7.0.7)–(7.0.8) 的黏性解 $(u^\varepsilon(x,t), v^\varepsilon(x,t))$ 全局存在且满足*

$$\|u^\varepsilon(x,t)\|_{L^\infty} \leqslant M, \quad 0 < c(\varepsilon, t) \leqslant v^\varepsilon(x,t) \leqslant M, \tag{7.0.9}$$

其中, 常数 $M > 0$ 与 ε 无关, 函数 $c(\varepsilon,t) > 0$ 可能会在 $\varepsilon \to 0$ 或 $t \to \infty$ 时趋于无穷; 而且, 存在黏性解序列的子列 $\{(u^\varepsilon(x,t), v^\varepsilon(x,t))\}$ 几乎处处收敛于柯西问题 (7.0.1)–(7.0.2) 的一个 L^∞ 熵解 $(u(x,t), v(x,t))$.

7.1　Le Roux 系统的黏性解

本节将证明柯西问题 (7.0.7)–(7.0.8) 的黏性解的存在性及其相关估计 (7.0.9).

因为 $(u_0^\varepsilon(x), v_0^\varepsilon(x)) = (u_0(x), v_0(x) + \varepsilon) * j^\varepsilon$, j^ε 是磨光核, 所以

$$(u_0^\varepsilon(x), v_0^\varepsilon(x)) \xrightarrow{\text{a.e.}} (u_0(x), v_0(x)) \quad (\varepsilon \to 0),$$
$$\|u_0^\varepsilon(x)\|_{L^\infty} \leqslant M_1, \quad \varepsilon \leqslant v_0^\varepsilon(x) \leqslant M_1,$$

其中, 常数 $M_1 > 0$ 只依赖于初值 $(u_0(x), v_0(x))$ 的 L^∞ 范数.

经过简单计算, 我们有

$$w_u = 1 + \frac{u}{D}, \quad w_v = \frac{2}{D}, \quad w_{uu} = \frac{4v}{D^3}, \quad w_{uv} = -\frac{2u}{D^3}, \quad w_{vv} = -\frac{4}{D^3},$$

$$z_u = 1 - \frac{u}{D}, \quad z_v = -\frac{2}{D}, \quad z_{uu} = -\frac{4v}{D^3}, \quad z_{uv} = \frac{2u}{D^3}, \quad z_{vv} = \frac{4}{D^3}.$$

于是分别用 (w_u, w_v) 和 (z_u, z_v) 乘系统 (7.0.7) 得

$$\begin{aligned}
&w(u,v)_t + \lambda_2 w(u,v)_x \\
=&\varepsilon(w_u u_{xx} + w_v v_{xx}) \\
=&\varepsilon w(u,v)_{xx} - \varepsilon(w_{uu}u_x^2 + 2w_{uv}u_x v_x + w_{vv}v_x^2) \\
=&\varepsilon w(u,v)_{xx} - \varepsilon\left(\frac{4v}{D^3}u_x^2 - \frac{4u}{D^3}u_x v_x - \frac{4}{D^3}v_x^2\right) \\
=&\varepsilon w(u,v)_{xx} - \frac{\varepsilon}{D^3}[(D+u)u_x + 2v_x][(D-u)u_x - 2v_x] \\
=&\varepsilon w(u,v)_{xx} - \frac{\varepsilon}{D}w(u,v)_x z(u,v)_x,
\end{aligned} \tag{7.1.1}$$

$$\begin{aligned}
&z(u,v)_t + \lambda_1 z(u,v)_x \\
=&\varepsilon(z_u u_{xx} + z_v v_{xx}) \\
=&\varepsilon z(u,v)_{xx} - \varepsilon(z_{uu}u_x^2 + 2z_{uv}u_x v_x + z_{vv}v_x^2) \\
=&\varepsilon z(u,v)_{xx} + \varepsilon\left(\frac{4v}{D^3}u_x^2 - \frac{4u}{D^3}u_x v_x - \frac{4}{D^3}v_x^2\right) \\
=&\varepsilon z(u,v)_{xx} + \frac{\varepsilon}{D^3}[(D+u)u_x + 2v_x][(D-u)u_x - 2v_x] \\
=&\varepsilon z(u,v)_{xx} + \frac{\varepsilon}{D}w(u,v)_x z(u,v)_x.
\end{aligned} \tag{7.1.2}$$

现在若把等式 (7.1.1) 和 (7.1.2) 分别视为变量 w 和 z 的方程, 则利用极值原理得 $w(u^\varepsilon, v^\varepsilon) \leqslant N$, $z(u^\varepsilon, v^\varepsilon) \geqslant -N$, 如果初值满足 $w(u_0^\varepsilon(x), v_0^\varepsilon(x)) \leqslant N$, $z(u_0^\varepsilon(x), v_0^\varepsilon(x)) \geqslant -N$. 而 (7.0.9) 中关于 v^ε 的下界估计可由定理 1.0.1 的结论 (4) 直接推出, 因此

$$\Sigma_2 = \{(u,v) : w(u,v) \leqslant N, z(u,v) \geqslant -N, v \geqslant 0\}$$

是方程组 (7.0.7) 的一个正不变域, 如图 7.1 所示. 于是我们得到了黏性解的先验估计 (7.0.9) 及其全局存在性.

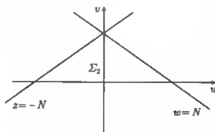


图 7.1 系统 (7.0.7) 的不变域

7.2　Le Roux 系统的 Lax 型熵–熵流与 H^{-1}_{loc} 紧性

本节将构造系统 (7.0.1) 的四族具有下述特殊形式的 Lax 型熵–熵流:

$$\eta^1_k = \mathrm{e}^{kw}\left(a_1(D) + \frac{b_1(D,k)}{k}\right),\quad q^1_k = \mathrm{e}^{kw}\left(c_1(D) + \frac{d_1(D,k)}{k}\right),$$

$$\eta^2_{-k} = \mathrm{e}^{-kw}\left(a_2(D) + \frac{b_2(D,k)}{k}\right),\quad q^2_{-k} = \mathrm{e}^{-kw}\left(c_2(D) + \frac{d_2(D,k)}{k}\right),$$

$$\eta^{1}_{-k} = \mathrm{e}^{-kz}\left(a_3(D) + \frac{b_3(D,k)}{k}\right),\quad q^1_{-k} = \mathrm{e}^{-kz}\left(c_3(D) + \frac{d_3(D,k)}{k}\right),$$

$$\eta^2_k = \mathrm{e}^{kz}\left(a_4(D) + \frac{b_4(D,k)}{k}\right),\quad q^2_k = \mathrm{e}^{kz}\left(c_4(D) + \frac{d_4(D,k)}{k}\right),$$

其中, w, z 是系统 (7.0.1) 的黎曼不变量, 并且利用引理 6.2.1 中给出的关于 Fuchsian 方程 (6.2.11) 的解的性质得到 a_i, b_i $(i = 1,2,3,4)$ 的必要估计. 然后验证这些熵–熵流满足 H^{-1}_{loc} 紧性.

令 $\rho = D^3$, $\theta = \frac{3}{2}u$, 则对于光滑解, 系统 (7.0.1) 等价于

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho\theta)_x = 0, \\ \theta_t + \left(\dfrac{\theta^2}{2} + \dfrac{3}{8}\rho^{\frac{2}{3}}\right)_x = 0. \end{cases} \tag{7.2.1}$$

把系统 (7.0.1) 的熵–熵流 (η, q) 视为变量 (ρ, θ) 的函数, 有

$$(q_\rho, q_\theta) = \left(\theta\eta_\rho + \frac{1}{4}\rho^{-\frac{1}{3}}\eta_\theta, \rho\eta_\rho + \theta\eta_\theta\right). \tag{7.2.2}$$

从式 (7.2.2) 中消去 q 即得熵方程

$$\eta_{\rho\rho} = \frac{1}{4}\rho^{-\frac{4}{3}}\eta_{\theta\theta}. \tag{7.2.3}$$

若函数 $\eta = h(\rho)\mathrm{e}^{k\theta}$ $(k \in \mathbb{Z}^+)$ 为方程 (7.2.3) 的解, 则

$$h''(\rho) = \frac{1}{4}k^2\rho^{-\frac{4}{3}}h(\rho).$$

令 $h(\rho) = \rho^{\frac{1}{3}}\phi(s)$, $s = \frac{3}{2}k\rho^{\frac{1}{3}}$, 则 $\phi(s)$ 满足 Fuchsian 方程

$$\phi''(s) - \left(1 + \frac{2}{s^2}\right)\phi(s) = 0. \tag{7.2.4}$$

与第 6 章完全相似, 可用 Frobenius 方法给出方程 (7.2.4) 的一个级数形式的解:

$$\phi_1(s) = s^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} s^{2n} = s^2 g(s), \tag{7.2.5}$$

其中, 系数 c_0 为任意正常数, c_{2n} 满足

$$c_{2n} = \frac{c_{2(n-1)}}{(2+2n)(1+2n)+2} \quad (\forall n \in \mathbb{Z}^+).$$

于是

$$\phi_2(s) = s^2 g(s) \int_s^{\infty} \frac{1}{s^4 g^2(s)} \mathrm{d}s \tag{7.2.6}$$

是方程 (7.2.4) 的一个与 $\phi_1(s)$ 线性无关的解. 显然分别由式 (7.2.5) 和 (7.2.6) 给出的 $\phi_1(s)$, $\phi_2(s)$ 具有性质: 对所有的 $s>0$ 有 $\phi_1(s)>0$, $\phi_1'(s)>0$ 以及 $\phi_2(s)>0$. 从 $\phi_2''(s)$ 恒正可推出 $\phi_2'(s)<0$, 因为 $\lim\limits_{s\to\infty}\phi_2(s)=0$, $\lim\limits_{s\to\infty}\phi_2'(s)=0$.

经过简单计算, 系统 (7.2.1) 的两个特征值为

$$\lambda_1 = \theta - \frac{\rho^{\frac{1}{3}}}{2}, \quad \lambda_2 = \theta + \frac{\rho^{\frac{1}{3}}}{2}, \tag{7.2.7}$$

其相应的黎曼不变量为

$$z = \theta - \frac{3}{2}\rho^{\frac{1}{3}}, \quad w = \theta + \frac{3}{2}\rho^{\frac{1}{3}}. \tag{7.2.8}$$

由式 (7.2.8), $\theta_w = \frac{1}{2}$, $\theta_z = \frac{1}{2}$, $\rho_w = \rho^{\frac{2}{3}}$, $\rho_z = -\rho^{\frac{2}{3}}$. 所以由链式法则得

$$\begin{cases} \eta_w = \dfrac{1}{2}\eta_\theta + \rho^{\frac{2}{3}}\eta_\rho, \quad \eta_z = \dfrac{1}{2}\eta_\theta - \rho^{\frac{2}{3}}\eta_\rho, \\ q_w = \dfrac{1}{2}q_\theta + \rho^{\frac{2}{3}}q_\rho, \quad q_z = \dfrac{1}{2}q_\theta - \rho^{\frac{2}{3}}q_\rho. \end{cases} \tag{7.2.9}$$

注意到 $q_w = \lambda_2\eta_w$, $q_z = \lambda_1\eta_z$, 则由式 (7.2.7) 及 (7.2.9) 得

$$q_\theta = q_w + q_z = \theta\eta_\theta + \rho\eta_\rho. \tag{7.2.10}$$

令 $\eta_k = \rho^{\frac{1}{3}}\phi(s)\mathrm{e}^{k\theta}$, $\eta_{-k} = \rho^{\frac{1}{3}}\phi(s)\mathrm{e}^{-k\theta}$, 则由式 (7.2.10), 相应于它们的熵流为

$$q_k = \eta_k\left(\theta - \frac{2}{3k} + \frac{\rho^{\frac{1}{3}}\phi'(s)}{2\phi(s)}\right), \quad q_{-k} = \eta_{-k}\left(\theta + \frac{2}{3k} - \frac{\rho^{\frac{1}{3}}\phi'(s)}{2\phi(s)}\right).$$

令 $\eta_k^1 = \rho^{\frac{1}{3}}\phi_1(s)\mathrm{e}^{k\theta}$, 则根据引理 6.2.1 有

$$\eta_k^1 = \rho^{\frac{1}{3}}\mathrm{e}^{kw}\left(1 + O\left(\frac{1}{s}\right)\right) = \rho^{\frac{1}{3}}\mathrm{e}^{kw}\left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \tag{7.2.11}$$

在 $s>0$ 的任意紧子集上成立;

$$q_k^1=\eta_k^1\left(\theta-\frac{2}{3k}+\frac{\rho^{\frac{1}{3}}}{2}\left(\frac{\phi_1'(s)}{\phi_1(s)}-1\right)+\frac{\rho^{\frac{1}{3}}}{2}\right)=\eta_k^1\left(\lambda_2+O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \tag{7.2.12}$$

对 $s\geqslant 0$ 成立, 因为 $s\left(\dfrac{\phi_1'(s)}{\phi_1(s)}-1\right)$ 一致有界; 而且在 $s>0$ 的任意紧子集上有

$$q_k^1=\eta_k^1\left(\lambda_2-\frac{2}{3k}+\frac{s}{3k}\left(\frac{\phi_1'(s)}{\phi_1(s)}-1\right)\right)=\eta_k^1\left(\lambda_2-\frac{2}{3k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right). \tag{7.2.13}$$

同理, 有

$$\eta_k^2=\rho^{\frac{1}{3}}\phi_2(s)\mathrm{e}^{k\theta}=\rho^{\frac{1}{3}}\mathrm{e}^{kz}\left(1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \tag{7.2.14}$$

在 $s>0$ 的任意紧子集上成立,

$$q_k^2=\eta_k^2\left(\lambda_1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \tag{7.2.15}$$

对 $s\geqslant 0$ 成立, 且在 $s>0$ 的任意紧子集上有

$$q_k^2=\eta_k^2\left(\lambda_1-\frac{2}{3k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right); \tag{7.2.16}$$

$$\eta_{-k}^1=\rho^{\frac{1}{3}}\phi_1(s)\mathrm{e}^{-k\theta}=\rho^{\frac{1}{3}}\mathrm{e}^{-kz}\left(1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \tag{7.2.17}$$

在 $s>0$ 的任意紧子集上成立,

$$q_{-k}^1=\eta_{-k}^1\left(\lambda_1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \tag{7.2.18}$$

对 $s\geqslant 0$ 成立, 且在 $s>0$ 的任意紧子集上有

$$q_{-k}^1=\eta_{-k}^1\left(\lambda_1+\frac{2}{3k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right); \tag{7.2.19}$$

$$\eta_{-k}^2=\rho^{\frac{1}{3}}\phi_2(s)\mathrm{e}^{-k\theta}=\rho^{\frac{1}{3}}\mathrm{e}^{-kw}\left(1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \tag{7.2.20}$$

在 $s>0$ 的任意紧子集上成立,

$$q_{-k}^2=\eta_{-k}^2\left(\lambda_2+O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \tag{7.2.21}$$

对 $s\geqslant 0$ 成立, 且在 $s>0$ 的任意紧子集上有

$$q_{-k}^2=\eta_{-k}^2\left(\lambda_2+\frac{2}{3k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right). \tag{7.2.22}$$

定理 7.2.1 上述任一 Lax 型熵 熵流 (η, q) 满足 $\eta(u^\varepsilon, v^\varepsilon)_t + q(u^\varepsilon, v^\varepsilon)_x$ 在 H_{loc}^{-1} 中紧, 其中 $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ 为柯西问题 (7.0.7) (7.0.8) 唯一确定的黏性解.

证明 显然系统 (7.0.1) 有个严格凸熵 $\eta^*(u,v) = \dfrac{u^2}{2} + \displaystyle\int_0^v \ln v \mathrm{d}v$ 及其相应的熵流 $q^*(u,v) = \dfrac{2u^3}{3} + uv\ln v$. 相似于结论 (6.3.1) 的证明, 有

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}} u_x^\varepsilon \text{ 和 } \varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{v_x^\varepsilon}{\sqrt{v^\varepsilon}} \text{ 在 } L_{\mathrm{loc}}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \text{ 中有界.} \tag{7.2.23}$$

下面只证明定理中的结论对 $(\eta, q) = (\eta_k^2, q_k^2)$ 的情形成立. 同理可证 (η_k^1, q_k^1), (η_{-k}^1, q_{-k}^1) 以及 (η_{-k}^2, q_{-k}^2) 均满足 H_{loc}^{-1} 紧性.

用 (η_u, η_v) 乘系统 (7.0.7) 得

$$\eta_t + q_x = \varepsilon\eta_{xx} - \varepsilon(\eta_{uu}u_x^2 + 2\eta_{uv}u_x v_x + \eta_{vv}v_x^2). \tag{7.2.24}$$

因为

$$\int_s^\infty \frac{\mathrm{d}s}{s^4 g^2(s)} = O\left(\frac{1}{s^3}\right) \quad (s \to 0),$$

所以对固定的 $k > 0$ 有

$$\eta_k^2 = \frac{2\mathrm{e}^{k\theta}}{3k} s^3 g(s) \int_s^\infty \frac{\mathrm{d}s}{s^4 g^2(s)}$$

一致有界, 从而 q_k^2 也一致有界. 于是 $\eta_k^2(u^\varepsilon, v^\varepsilon)_t + q_k^2(u^\varepsilon, v^\varepsilon)_x$ 在 $W^{-1,\infty}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ 中有界. 注意到 $g'(s)/s \leqslant g(s)$, 有

$$\int_s^\infty \frac{g'(s)\mathrm{d}s}{s^3 g^3(s)} = O\left(\frac{1}{s}\right) \quad (s \to 0).$$

而由分部积分法得

$$\eta_k^2 = -\frac{2\mathrm{e}^{k\theta}}{9k}\left(\frac{1}{g(s)} + 2s^3 g(s)\int_s^\infty \frac{g'(s)\mathrm{d}s}{s^3 g^3(s)}\right) = I_1 - \frac{4\mathrm{e}^{k\theta}}{9k} I,$$

故 $(\eta_k^2)_s$ 和 $(\eta_k^2)_\theta$ 均有界且 $(\eta_k^2)_s = O(s)$ $(s \to 0)$. 由于

$$\frac{\partial s}{\partial u} = \frac{3}{2} ku(u^2 + 4v)^{-\frac{1}{2}}, \quad \frac{\partial s}{\partial v} = 3k(u^2 + 4v)^{-\frac{1}{2}},$$

因而 $\varepsilon(\eta_k^2)_x = \varepsilon O(|u_x| + |v_x/\sqrt{v}|)$, 所以由结论 (7.2.23), $\varepsilon(\eta_k^2)_{xx}$ 在 $H_{\mathrm{loc}}^{-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ 中紧.

显然 $I_1 = -\dfrac{2}{9kg(s)}\mathrm{e}^{k\theta}$ 作为 u, v 的函数二阶连续可微, 所以定理 7.2.1 的证明

集中于 L 的 $L^1_{\rm loc}$ 有界性, 其中

$$L=\varepsilon(I_{uu}u_x^2+2I_{uv}u_xv_x+I_{vv}v_x^2),\quad I=s^3g(s)\int_s^\infty\frac{g'(s)\mathrm{d}s}{s^3g^3(s)}.$$

由链式法则可知 $L=L_1+L_2$, 其中

$$\begin{cases}L_1=\varepsilon I_{ss}\left(s_u^2u_x^2+2s_us_vu_xv_x+s_v^2v_x^2\right),\\ L_2=\varepsilon I_s(s_{uu}u_x^2+2s_{uv}u_xv_x+s_{vv}v_x^2).\end{cases}$$

由于 $g'(s)/s\leqslant g(s)$, 因而 $I_s=O(s)\ (s\to0)$, I_{ss} 有界, 所以 L_1 和 L_2 均为 $\varepsilon\left[O(v_x^2/|v|)+O(u_x^2)\right]$ 所控制. 因此再次利用结论 (7.2.23) 即得 L 在 $L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中有界. 这就完成了定理 7.2.1 的证明. □

7.3　Le Roux 系统的弱解

本节用补偿列紧方法证明柯西问题 (7.0.1)-(7.0.2) 的整体弱解的存在性.

设 $\mathbb{R}^2$ 上的具有紧支集的概率测度 ν 具有性质:

$$\langle\nu,\eta^1\rangle\langle\nu,q^2\rangle-\langle\nu,\eta^2\rangle\langle\nu,q^1\rangle=\langle\nu,\eta^1q^2-\eta^2q^1\rangle$$

对系统 (7.0.1) 的任何满足 $\eta^i(u^\varepsilon,v^\varepsilon)_t+q^i(u^\varepsilon,v^\varepsilon)_x$ 在 $H^{-1}_{\rm loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中紧的熵–熵流 (η^i,q^i) $(i=1,2)$ 成立, 则定理 7.0.1 中弱解的存在性的证明就归结为把 ν 归约为点测度. 我们将用 7.2 节构造的 $(\eta^i_{\pm k},q^i_{\pm k})$ $(i=1,2)$ 及其相关估计 (7.2.11)~(7.2.22) 来实现这个目标.

下面的证明与第 6 章中给出的几乎相同.

记 Q 为 ν 的最小特征矩形

$$Q=\{(u,v):w_-\leqslant w\leqslant w_+,\ z_-\leqslant z\leqslant z_+,\ v\geqslant0\},$$

则 w^-, w^+ 非负, z^-, z^+ 非正.

若 $\mathrm{supp}\,\nu$ 只包含点 (0,0), 则定理 7.0.1 已获得证明. 假设 ν 不是集中于 (0,0) 的点测度, 则 $\langle\nu,\eta^1_k\rangle>0$, $\langle\nu,\eta^2_{-k}\rangle>0$.

下面介绍两族定义在 Q 上的新概率测度 $\mu_k^\pm$:

$$\langle\mu_k^+,h\rangle=\frac{\langle\nu,h\eta^1_k\rangle}{\langle\nu,\eta^1_k\rangle},\quad\langle\mu_k^-,h\rangle=\frac{\langle\nu,h\eta^2_{-k}\rangle}{\langle\nu,\eta^2_{-k}\rangle},$$

其中, $h=h(u,v)$ 为任一连续函数. 显然 μ_k^+ 和 μ_k^- 关于 k 一致有界, 所以根据 L^∞ 空间的弱 * 紧性, 存在 Q 上的概率测度 $\mu^\pm$ 使得 $\langle\mu^\pm,h\rangle=\lim\limits_{k\to\infty}\langle\mu_k^\pm,h\rangle$ 对 $\{\mu_k^\pm\}$ 的

某个子列成立, 而且

$$\operatorname{supp}\mu^+ = Q\cap\{(u,v): w = w_+\},\quad \operatorname{supp}\mu^- = Q\cap\{(u,v): w = w_-\}.$$

因为在 $s>0$ 的任意紧子集上有

$$\eta_k^1 = e^{kw}\rho^{\frac{1}{3}}\left(1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right),\quad \eta_{-k}^2 = e^{-kw}\rho^{\frac{1}{3}}\left(1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right),$$

且由假设, ν 不集中于 $s=0$, 所以运用证得 (6.4.8) 的相同方法可推出

$$\langle\mu^+,\lambda_2\eta-q\rangle = \langle\mu^-,\lambda_2\eta-q\rangle \tag{7.3.1}$$

对系统 (7.0.1) 的任何满足 H_{loc}^{-1} 紧性的熵-熵流 (η,q) 成立.

把 (η_k^1,q_k^1) 代入 (7.3.1) 得

$$|\langle\mu^+,q-\lambda_2\eta\rangle| \geqslant \frac{c_1}{k}e^{kw_+},\quad |\langle\mu^-,q-\lambda_2\eta\rangle| \leqslant \frac{c_2}{k}e^{kw_-}, \tag{7.3.2}$$

其中, c_1, c_2 为正常数. 因此由式 (7.3.1), (7.3.2) 得 $w_+=w_-$. 同理可证 $z_+=z_-$. 这蕴涵着 ν 为点测度, 从而定理 7.0.1 获得证明. □

评　注

系统 (7.0.1) 的特征场或由方程 $w=\mathrm{const}$, $z=\mathrm{const}$ 确定的曲线在 uOv 平面内都是直线, 所以系统 (7.0.1) 是 Temple 型的, 它的激波曲线和疏波曲线相一致. 这类系统最先由 Temple[32] 进行了研究. 关于一般的 $n\times n$ Temple 型系统在其严格双曲区域内的 L^∞ 弱解的全局存在性及唯一性由 Heibig 在文献 [41] 中得到.

James, Peng 和 Perthame[13] 应用动力学公式和补偿列紧方法相结合的思想给下述非严格双曲的 $n\times n$ 色谱学系统:

$$u_{it}+\left(\frac{k_iu_i}{1+D}\right)_x = 0,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{7.1}$$

建立了一个紧性框架, 其中常数 k_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 满足 $0<k_1<k_2<\cdots<k_n$, $D=k_1+\cdots+k_n$.

系统 (7.1) 是补偿列紧方法在由多个方程组成的双曲系统中的唯一应用. 不过, 构造系统 (7.1) 的适当的逼近解序列 $\{u_1^l,\cdots,u_n^l\}$ 以及证明 $\eta(u_1^l,\cdots,u_n^l)_t+q(u_1^l,\cdots,u_n^l)_x$ 在 $W_{\mathrm{loc}}^{-1,2}(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^+)$ 中紧是个非常有趣的课题, 其中 (η,q) 是在文献 [13] 中由动力学公式给出的系统 (7.1) 的熵-熵流. 如果这个问题能被解决, 那么根据文献 [13] 中的紧性框架就可得到系统 (7.1) 的弱解的整体存在性. 定理 7.0.1 的证明选自文献 [42]. 处理系统 (7.0.1) 的主要困难是熵在其非严格双曲区域内的奇性. 系统 (7.1) 更难研究, 因为它含有更多的方程.

第 8 章　等熵气体动力学系统

本章研究欧拉坐标系下的等熵气体动力学系统

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ (\rho u)_t + \left(\rho u^2 + P(\rho)\right)_x = 0 \end{cases} \tag{8.0.1}$$

带有界可测初值

$$(\rho(x,0), u(x,0)) = (\rho_0(x), u_0(x)) \quad (\rho_0(x) \geqslant 0) \tag{8.0.2}$$

的柯西问题, 其中 ρ, u 分别表示气体的密度和速度, 而压强 $P = P(\rho)$ 满足 $P'(\rho) \geqslant 0$. 对于多方气体, P 取特殊形式 $P(\rho) = c\rho^\gamma$, 其中 $\gamma > 1$, c 是任意一个正常数. 本章取 $c = k^2 = \dfrac{\theta^2}{\gamma}$, $\theta = \dfrac{\gamma - 1}{2}$.

系统 (8.0.1) 可改写为

$$\begin{cases} \rho_t + m_x = 0, \\ m_t + \left(\dfrac{m^2}{\rho} + P(\rho)\right)_x = 0, \end{cases}$$

其中, $m = \rho u$ 表示动量.

令映射 $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ 定义为

$$F : (\rho, m) \to \left(m, \frac{m^2}{\rho} + P(\rho)\right),$$

则

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}F(\rho, m) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{m^2}{\rho^2} + P'(\rho) & \dfrac{2m}{\rho} \end{pmatrix},$$

其特征方程为

$$\lambda^2 - \frac{2m}{\rho}\lambda + \frac{m^2}{\rho^2} - P'(\rho) = 0.$$

于是系统 (8.0.1) 的两个特征值为

$$\lambda_1 = \frac{m}{\rho} - \sqrt{P'(\rho)}, \quad \lambda_2 = \frac{m}{\rho} + \sqrt{P'(\rho)},$$

其相应的右特征向量为

$$\boldsymbol{r}_1 = (1, \lambda_1)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{r}_2 = (1, \lambda_2)^{\mathrm{T}}.$$

系统 (8.0.1) 的黎曼不变量 $w(\rho, m)$ 与 $z(\rho, m)$ 为满足

$$(w_\rho, w_m) \cdot \mathrm{d}F = \lambda_2 (w_\rho, w_m), \quad (z_\rho, z_m) \cdot \mathrm{d}F = \lambda_1 (z_\rho, z_m) \tag{8.0.3}$$

的函数. 方程组 (8.0.3) 的一个解为

$$w(\rho, m) = \frac{m}{\rho} + \int_0^\rho \frac{\sqrt{P'(s)}}{s} \mathrm{d}s, \quad z(\rho, m) = \frac{m}{\rho} - \int_0^\rho \frac{\sqrt{P'(s)}}{s} \mathrm{d}s.$$

经过简单计算, 我们有

$$\nabla \lambda_1 \cdot \boldsymbol{r}_1 = \left(-\frac{m}{\rho^2} - \frac{P''(\rho)}{2\sqrt{P'(\rho)}}, \frac{1}{\rho} \right) (1, \lambda_1)^{\mathrm{T}} = -\frac{\rho P''(\rho) + 2P'(\rho)}{2\rho\sqrt{P'(\rho)}},$$

$$\nabla \lambda_2 \cdot \boldsymbol{r}_2 = \left(-\frac{m}{\rho^2} + \frac{P''(\rho)}{2\sqrt{P'(\rho)}}, \frac{1}{\rho} \right) (1, \lambda_2)^{\mathrm{T}} = \frac{\rho P''(\rho) + 2P'(\rho)}{2\rho\sqrt{P'(\rho)}}.$$

特别地, 对于多方气体有

$$\lambda_1 = \frac{m}{\rho} - \theta\rho^\theta, \quad \lambda_2 = \frac{m}{\rho} + \theta\rho^\theta; \tag{8.0.4}$$

$$w(\rho, m) = \frac{m}{\rho} + \rho^\theta, \quad z(\rho, m) = \frac{m}{\rho} - \rho^\theta; \tag{8.0.5}$$

以及

$$\nabla \lambda_1 \cdot \boldsymbol{r}_1 = -\theta(\theta + 1)\rho^{\frac{\gamma-3}{2}}, \quad \nabla \lambda_2 \cdot \boldsymbol{r}_2 = \theta(\theta + 1)\rho^{\frac{\gamma-3}{2}}. \tag{8.0.6}$$

因此对于多方气体的情形, 由 (8.0.4) 知系统 (8.0.1) 在区域 $\{(x,t) : \rho(x,t) > 0\}$ 内严格双曲, 而在区域 $\{(x,t) : \rho(x,t) = 0\}$ 上非严格双曲; 由 (8.0.6), 当绝热指数 $\gamma \in (1, 3]$ 时系统 (8.0.1) 真正非线性, 而当绝热指数 $\gamma > 3$ 时该系统在 $\rho = 0$ 上线性退化.

我们将证明 $\gamma > 1$ 的多方气体动力学系统以及等温气体动力学系统广义解的存在性, 并且对一般的等熵气体动力学系统进行研究.

8.1 等熵气体动力学系统的黏性解

考虑相应的抛物系统

$$\begin{cases} \rho_t + m_x = \varepsilon \rho_{xx}, \\ m_t + \left(\dfrac{m^2}{\rho} + P(\rho) \right)_x = \varepsilon m_{xx} \end{cases} \tag{8.1.1}$$

带光滑初值

$$(\rho(x,0), m(x,0)) = (\rho_0^\varepsilon(x), m_0^\varepsilon(x)) \tag{8.1.2}$$

的柯西问题, 其中

$$(\rho_0^\varepsilon(x), m_0^\varepsilon(x)) = (\rho_0(x)+\varepsilon, \rho_0(x)u_0(x)) * j^\varepsilon. \tag{8.1.3}$$

显然 $(\rho_0^\varepsilon(x), m_0^\varepsilon(x)) \in C^\infty(\mathbb{R}) \times C^\infty(\mathbb{R})$, 而且

$$(\rho_0^\varepsilon(x), m_0^\varepsilon(x)) \xrightarrow{\text{a.e.}} (\rho_0(x), m_0(x)) \quad (\varepsilon \to 0),$$

$$0 \leqslant \rho_0^\varepsilon(x) \leqslant M_1, \quad \|u_0^\varepsilon(x)\|_{L^\infty} = \left\| \frac{m_0^\varepsilon(x)}{\rho_0^\varepsilon(x)} \right\|_{L^\infty} \leqslant M_1,$$

其中, 常数 $M_1 > 0$ 只依赖于初值 $(\rho_0(x), u_0(x))$ 的 L^∞ 范数而与 ε 无关.

定理 8.1.1 *设初值 $(\rho_0(x), u_0(x))$ 有界可测且 $\rho_0(x) \geqslant 0$. 如果函数 $P(\rho) \in C^2(0,\infty)$ 具有性质: 当 $\rho > 0$ 时, $P'(\rho) > 0$, $2P'(\rho) + \rho P''(\rho) \geqslant 0$, 并且对任何 $c > 0$ 有*

$$\int_c^\infty \frac{\sqrt{P'(\rho)}}{\rho} \mathrm{d}\rho = \infty, \quad \int_0^c \frac{\sqrt{P'(\rho)}}{\rho} \mathrm{d}\rho < \infty,$$

那么对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 柯西问题 (8.1.1) – (8.1.2) 的黏性解全局存在且满足

$$0 < c(\varepsilon,t) \leqslant \rho^\varepsilon(x,t) \leqslant M, \quad \|u^\varepsilon(x,t)\|_{L^\infty} = \left\| \frac{m^\varepsilon(x,t)}{\rho^\varepsilon(x,t)} \right\|_{L^\infty} \leqslant M, \tag{8.1.4}$$

其中, M 为与 ε 无关的正常数, 函数 $c(\varepsilon,t) > 0$ 可能会因 $\varepsilon \to 0$ 或 $t \to \infty$ 而趋于零.

证明 分别用 (w_ρ, w_m) 和 (z_ρ, z_m) 乘系统 (8.1.1) 得

$$w_t + \lambda_2 w_x = \varepsilon w_{xx} + \frac{2\varepsilon}{\rho}\rho_x w_x - \frac{\varepsilon}{2\rho^2\sqrt{P'(\rho)}}[2P'(\rho) + \rho P''(\rho)]\rho_x^2,$$

$$z_t + \lambda_1 z_x = \varepsilon z_{xx} + \frac{2\varepsilon}{\rho}\rho_x z_x + \frac{\varepsilon}{2\rho^2\sqrt{P'(\rho)}}[2P'(\rho) + \rho P''(\rho)]\rho_x^2,$$

因而由函数 $P(\rho)$ 的性质得

$$w_t + \lambda_2 w_x \leqslant \varepsilon w_{xx} + \frac{2\varepsilon}{\rho}\rho_x w_x, \quad z_t + \lambda_1 z_x \geqslant \varepsilon z_{xx} + \frac{2\varepsilon}{\rho}\rho_x z_x. \tag{8.1.5}$$

若把 (8.1.5) 视为变量 w 和 z 的不等式, 则应用极值原理就得到估计 $w(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon) \leqslant N$, $z(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon) \geqslant -N$. 这说明区域

$$\Sigma_3 = \{(\rho, m) : w(\rho, m) \leqslant N,\ z(\rho, m) \geqslant -N\}$$

是系统 (8.1.1) 的一个正不变域, 如图 8.1 所示. 于是我们有先验估计

$$0 \leqslant \rho^{\varepsilon} \leqslant M, \quad \|u^{\varepsilon}\| \leqslant M.$$

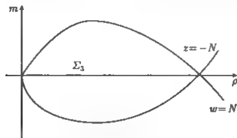


图 8.1 系统 (8.1.1) 的不变域

这是由于 $\int_c^{\infty} \sqrt{P'(\rho)}/\rho \mathrm{d}\rho = \infty$ 和 $\int_0^c \sqrt{P'(\rho)}/\rho \mathrm{d}\rho < \infty$ 对任意常数 $c > 0$ 成立.

由于 u^{ε} 一致有界, 所以利用定理 1.0.1 中的最后一个结论就得到 ρ^{ε} 的正下界. 这就证明了式 (8.1.4) 及黏性解的全局存在性. 证毕. □

8.2 多方气体动力学系统的弱熵及 $H_{\rm loc}^{-1}$ 紧性

本节构造多方气体动力学系统的弱熵-熵流 (η, q), 并且验证 $\eta(\rho^{\varepsilon}, m^{\varepsilon})_t + q(\rho^{\varepsilon}, m^{\varepsilon})_x$ 在 $H_{\rm loc}^{-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ 中紧, 其中 $(\rho^{\varepsilon}(x,t), m^{\varepsilon}(x,t))$ 为柯西问题 (8.1.1)–(8.1.2) 的黏性解.

把系统 (8.0.1) 中的第二个方程改写为

$$\rho_t u + \rho u_t + (\rho u)_x u + \rho u u_x + P(\rho)_x = 0,$$

并把之代入第一个方程, 就得到下述系统:

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ u_t + \left(\dfrac{1}{2}u^2 + \displaystyle\int_0^{\rho} \dfrac{P'(s)}{s} \mathrm{d}s\right)_x = 0. \end{cases} \tag{8.2.1}$$

若解有激波, 系统 (8.0.1) 与 (8.2.1) 不同. 第 9、第 10 章将研究系统 (8.2.1) 带有界可测初值的柯西问题的广义解. 但就光滑解而言, 系统 (8.2.1) 等价于系统 (8.0.1). 特别地, 这两个系统有着相同的熵-熵流. 因此系统 (8.0.1) 的任一熵-熵流 $(\eta(\rho, m), q(\rho, m))$ 满足方程组

$$(q_{\rho}, q_u) = (\eta_{\rho}, \eta_u) \cdot \begin{pmatrix} u & \rho \\ \dfrac{P'(\rho)}{\rho} & u \end{pmatrix},$$

即

$$q_\rho = u\eta_\rho + \frac{P'(\rho)}{\rho}\eta_u, \quad q_u = \rho\eta_\rho + u\eta_u. \tag{8.2.2}$$

从 (8.2.2) 中消去 q 得

$$\eta_{\rho\rho} = \frac{P'(\rho)}{\rho^2}\eta_{uu} = \theta^2\rho^{\gamma-3}\eta_{uu}. \tag{8.2.3}$$

系统 (8.0.1) 的熵 $\eta(\rho,u)$ 称为弱熵, 如果 $\eta(0,u)=0$. 具体地说, 它是方程 (8.2.3) 带特殊初值条件

$$\eta(\rho=0,u)=0, \quad \eta_\rho(\rho=0,u)=g(u) \tag{8.2.4}$$

的解, 其中 $g(u)$ 是任意给定的可微函数.

引理 8.2.1 *设 $\rho \geqslant 0$, u, $w \in \mathbb{R}$, 令*

$$G(\rho,w) = (\rho^{\gamma-1}-w^2)_+^\lambda, \quad \lambda = \frac{3-\gamma}{2(\gamma-1)},$$

其中, $x_+ \triangleq \max\{0,x\}$, 则柯西问题 (8.2.3)-(8.2.4) 的解由下述公式给出:

$$\begin{aligned}\eta(w,z) &= \int_z^w [(w-s)(s-z)]^\lambda g(s)\mathrm{d}s \\ &= (w-z)^{\frac{2}{\gamma-1}}\int_0^1 [\tau(1-\tau)]^\lambda g(w-(w-z)\tau)\mathrm{d}\tau,\end{aligned} \tag{8.2.5}$$

或者等价地,

$$\begin{aligned}\eta(\rho,u) &= \int_{\mathbb{R}} g(\xi)G(\rho,\xi-u)\mathrm{d}\xi \\ &= 2^{\frac{2}{\gamma-1}}\rho\int_0^1 [\tau(1-\tau)]^\lambda g(u+\rho^\theta-2\rho^\theta\tau)\mathrm{d}\tau;\end{aligned} \tag{8.2.6}$$

而相应于 η 的弱熵流 q 为

$$q(\rho,u) = \int_{\mathbb{R}} g(\xi)[\theta\xi+(1-\theta)u]G(\rho,\xi-u)\mathrm{d}\xi. \tag{8.2.7}$$

进一步, 若初值 $g(u)\in C^1(\mathbb{R})$, 则弱熵 η 满足下述估计:

$$|\eta_\rho(\rho,m)| \leqslant L, \quad |\eta_m(\rho,m)| \leqslant L, \tag{8.2.8}$$

其中, L 只依赖于 (ρ,u) 的 L^∞ 界 M.

证明 与方程 (6.2.4) 完全相似, 系统 (8.0.1) 的熵也满足下面的方程:

$$\eta_{wz} + \frac{\lambda_{2z}}{\lambda_2-\lambda_1}\eta_w - \frac{\lambda_{1w}}{\lambda_2-\lambda_1}\eta_z = 0, \tag{8.2.9}$$

其中, λ_1, λ_2, w, z 由式 (8.0.4), (8.0.5) 给出.

经过简单计算, 有

$$
\lambda_1=\frac{3-\gamma}{4}w+\frac{\gamma+1}{4}z,\quad \lambda_2=\frac{\gamma+1}{4}w+\frac{3-\gamma}{4}z,
$$
$$
\lambda_{2z}=\lambda_{1w}=\frac{3-\gamma}{4},\quad \lambda_2-\lambda_1=\frac{\gamma-1}{2}(w-z),
$$

以及

$$
\begin{aligned}
\eta_\rho(\rho,u)&=\theta\rho^{\theta-1}[\eta(w,z)_w-\eta(w,z)_z]\\
&=\theta\left(\frac{w-z}{2}\right)^{\frac{\gamma-3}{\gamma-1}}[\eta(w,z)_w-\eta(w,z)_z],
\end{aligned}
$$

于是熵方程 (8.2.9) 简化为达布–欧拉–泊松方程

$$
\eta_{wz}+\frac{\lambda}{w-z}(\eta_w-\eta_z)=0.
$$

弱熵 η 满足条件

$$
\lim_{w-z\to 0}\eta(w,z)=0
$$

以及

$$
\lim_{w-z\to 0}\theta\left(\frac{w-z}{2}\right)^{\frac{\gamma-3}{\gamma-1}}[\eta(w,z)_w-\eta(w,z)_z]=g(w).
$$

因此由专著 [43] 中达布–欧拉–泊松方程理论, 我们得到弱熵的表达式 (8.2.5), 而若把弱熵 η 视为 (ρ,u) 的函数即得式 (8.2.6).

利用 (8.2.2) 中第二个方程及弱熵的表达式 (8.2.6), 有

$$
\begin{aligned}
q_u=&\eta+2^{\frac{2}{\gamma-1}}\theta\int_0^1[\tau(1-\tau)]^\lambda g'(u+\rho^\theta-2\rho^\theta\tau)(1-2\tau)\rho^{\theta+1}\mathrm{d}\tau\\
&+2^{\frac{2}{\gamma-1}}u\rho\int_0^1[\tau(1-\tau)]^\lambda g'(u+\rho^\theta-2\rho^\theta\tau)\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}\tag{8.2.10}
$$

因为

$$
\begin{aligned}
&\int_0^u ug'(u+\rho^\theta-2\rho^\theta\tau)\mathrm{d}u\\
=&ug(u+\rho^\theta-2\rho^\theta\tau)-\int_0^u g(u+\rho^\theta-2\rho^\theta\tau)\mathrm{d}u,
\end{aligned}
$$

所以由式 (8.2.10) 得

$$
\begin{aligned}
q(\rho,u)=&\int_0^u\eta\mathrm{d}u+\eta-\int_0^u\eta\mathrm{d}u\\
&+2^{\frac{2}{\gamma-1}}\theta\int_0^1[\tau(1-\tau)]^\lambda g(u+\rho^\theta-2\rho^\theta\tau)(1-2\tau)\rho^{\theta+1}\mathrm{d}\tau\\
=&\int_z^w[(w-s)(s-z)]^\lambda[(1-\theta)u+\theta s]g(s)\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

利用 (8.2.6) 中的最后一个等式即可得到 $\nabla\eta(\rho,m)$ 的界估计 (8.2.8). 证毕. □

引理 8.2.2 *多方气体动力学系统* (8.0.1) *的任何弱熵* $\eta(\rho,m)$ *满足*

$$\varepsilon(\rho_x^\varepsilon,m_x^\varepsilon)\cdot\nabla^2\eta(\rho^\varepsilon,m^\varepsilon)\cdot(\rho_x^\varepsilon,m_x^\varepsilon)^{\mathrm T}$$

在 $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb R\times\mathbb R^+)$ *中有界, 其中*

$$\nabla^2\eta(\rho^\varepsilon,m^\varepsilon)=\begin{pmatrix}\eta_{\rho\rho}(\rho^\varepsilon,m^\varepsilon) & \eta_{\rho m}(\rho^\varepsilon,m^\varepsilon)\\ \eta_{m\rho}(\rho^\varepsilon,m^\varepsilon) & \eta_{mm}(\rho^\varepsilon,m^\varepsilon)\end{pmatrix}.$$

证明 为了方便, 暂时略去黏性解 $(\rho^\varepsilon,m^\varepsilon)$ 中的上标 ε.

容易看出系统 (8.0.1) 有个凸熵

$$\eta^*(\rho,m)=\frac{m^2}{2\rho}+\frac{\theta^2}{\gamma(\gamma-1)}\rho^\gamma,$$

因而由证得结论 (6.3.1) 的相同技巧可得

$$\varepsilon(\rho_x,m_x)\cdot\nabla^2\eta^*(\rho,m)\cdot(\rho_x,m_x)^{\mathrm T}$$

在 $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb R\times\mathbb R^+)$ 中有界. 于是

$$\varepsilon\theta^2\rho^{\gamma-2}\rho_x^2+\varepsilon\frac{1}{\rho}\left(\frac{m}{\rho}\rho_x-m_x\right)^2$$

在 $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb R\times\mathbb R^+)$ 中有界.

由于

$$\theta^2\rho^{\gamma-2}\rho_x^2+\frac{1}{\rho}\left(\frac{m}{\rho}\rho_x-m_x\right)^2=\theta^2\rho^{\gamma-2}\rho_x^2+\rho u_x^2,$$

所以

$$\varepsilon\rho^{\gamma-2}\rho_x^2,\ \varepsilon\frac{1}{\rho}\left(\frac{m}{\rho}\rho_x-m_x\right)^2,\ \varepsilon\rho u_x^2\ \text{在}\ L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb R\times\mathbb R^+)\ \text{中都有界}. \tag{8.2.11}$$

对于由 (8.2.6) 表示的弱熵 η, 直接的计算表明:

$$\begin{aligned}
\eta_\rho(\rho,m)=&\int_0^1[\tau(1-\tau)]^\lambda g\left(\frac{m}{\rho}+\rho^\theta-2\rho^\theta\tau\right)\mathrm d\tau\\
&+\int_0^1[\tau(1-\tau)]^\lambda g'\left(\frac{m}{\rho}+\rho^\theta-2\rho^\theta\tau\right)\left[-\frac{m}{\rho}+(1-2\tau)\theta\rho^\theta\right]\mathrm d\tau,\\
\eta_m(\rho,m)=&\int_0^1[\tau(1-\tau)]^\lambda g'\left(\frac{m}{\rho}+\rho^\theta-2\rho^\theta\tau\right)\mathrm d\tau,\\
\eta_{\rho\rho}(\rho,m)=&\int_0^1[\tau(1-\tau)]^\lambda g'\left(\frac{m}{\rho}+\rho^\theta-2\rho^\theta\tau\right)(1-2\tau)(\theta+\theta^2)\rho^{\theta-1}\mathrm d\tau\\
&+\int_0^1[\tau(1-\tau)]^\lambda g''\left(\frac{m}{\rho}+\rho^\theta-2\rho^\theta\tau\right)\rho\left[-\frac{m}{\rho^2}+(1-2\tau)\theta\rho^{\theta-1}\right]^2\mathrm d\tau\\
&I_1+I_2+I_3+I_4,
\end{aligned}$$

其中

$$
\begin{aligned}
I_1 &= (\theta+\theta^2)\rho^{\theta-1}\int_0^1 [\tau(1-\tau)]^\lambda (1-2\tau) g'\left(\frac{m}{\rho}+\rho^\theta-2\rho^\theta\tau\right)\mathrm{d}\tau,\\
I_2 &= \frac{m^2}{\rho^3}\int_0^1 [\tau(1-\tau)]^\lambda g''\left(\frac{m}{\rho}+\rho^\theta-2\rho^\theta\tau\right)\mathrm{d}\tau,\\
I_3 &= \theta^2\rho^{2\theta-1}\int_0^1 [\tau(1-\tau)]^\lambda g''\left(\frac{m}{\rho}+\rho^\theta-2\rho^\theta\tau\right)(1-2\tau)^2\mathrm{d}\tau,\\
I_4 &= -2\theta u\rho^{\theta-1}\int_0^1 [\tau(1-\tau)]^\lambda (1-2\tau) g''\left(\frac{m}{\rho}+\rho^\theta-2\rho^\theta\tau\right)\mathrm{d}\tau.\\
\eta_{\rho m}(\rho,m) &= \int_0^1 [\tau(1-\tau)]^\lambda g''\left(\frac{m}{\rho}+\rho^\theta-2\rho^\theta\tau\right)\left[-\frac{m}{\rho^2}+(1-2\tau)\theta\rho^{\theta-1}\right]\mathrm{d}\tau\\
&= I_5+I_6,
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
I_5 &= -\frac{m}{\rho^2}\int_0^1 [\tau(1-\tau)]^\lambda g''\left(\frac{m}{\rho}+\rho^\theta-2\rho^\theta\tau\right)\mathrm{d}\tau,\\
I_6 &= \theta\rho^{\theta-1}\int_0^1 [\tau(1-\tau)]^\lambda (1-2\tau) g''\left(\frac{m}{\rho}+\rho^\theta-2\rho^\theta\tau\right)\mathrm{d}\tau,
\end{aligned}
$$

以及

$$
\eta_{mm}(\rho,m) = \frac{1}{\rho}\int_0^1 [\tau(1-\tau)]^\lambda g''\left(\frac{m}{\rho}+\rho^\theta-2\rho^\theta\tau\right)\mathrm{d}\tau = I_7.
$$

因为 $2\theta-1=\gamma-2$, 所以由结论 (8.2.11) 知 $\varepsilon I_3\rho_x^2$ 在 $L_{\mathrm{loc}}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中有界. 令 $l(\tau)=\int_0^\tau [s(1-s)]^\lambda(1-2s)\mathrm{d}s$, 则易见 $l(0)=l(1)=0$, 从而

$$
\begin{aligned}
&\rho^{\theta-1}\int_0^1 [\tau(1-\tau)]^\lambda (1-2\tau) g'\left(\frac{m}{\rho}+\rho^\theta-2\rho^\theta\tau\right)\mathrm{d}\tau\\
={}&2\rho^{2\theta-1}\int_0^1 l(\tau) g''\left(\frac{m}{\rho}+\rho^\theta-2\rho^\theta\tau\right)\mathrm{d}\tau,\\
&\rho^{\theta-1}\int_0^1 [\tau(1-\tau)]^\lambda (1-2\tau) g''\left(\frac{m}{\rho}+\rho^\theta-2\rho^\theta\tau\right)\mathrm{d}\tau\\
={}&2\rho^{2\theta-1}\int_0^1 l(\tau) g'''\left(\frac{m}{\rho}+\rho^\theta-2\rho^\theta\tau\right)\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}
$$

因此 $\varepsilon I_1\rho_x^2$ 和 $\varepsilon I_4\rho_x^2$ 在 $L_{\mathrm{loc}}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中都有界.

注意到

$$
\varepsilon I_6\rho_x m_x = \varepsilon u I_6\rho_x^2 + \varepsilon I_6\rho\rho_x u_x, \tag{8.2.12}
$$

所以根据结论 (8.2.11), 容易看出等式 (8.2.12) 的右端第一项在 $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中有界, 而且第二项在 $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中也有界, 这是因为

$$\begin{aligned}|\varepsilon I_6\rho\rho_x u_x| =& \varepsilon\theta\rho^\theta\int_0^1[\tau(1-\tau)]^\lambda\left|(1-2\tau)g''\left(\frac{m}{\rho}+\rho^\theta-2\rho^\theta\tau\right)\right|\mathrm{d}\tau|\rho_x u_x\\ \leqslant& \varepsilon\theta(\rho^{2\theta-1}\rho_x^2+\rho u_x^2)\\ &\times\int_0^1[\tau(1-\tau)]^\lambda\left|(1-2\tau)g''\left(\frac{m}{\rho}+\rho^\theta-2\rho^\theta\tau\right)\right|\mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

此外, 有

$$\varepsilon(I_2\rho_x^2+2I_5\rho_x m_x+I_7m_x^2)=\varepsilon\frac{1}{\rho}\left(\frac{m}{\rho}\rho_x-m_x\right)^2$$

在 $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中有界. 于是引理 8.2.2 获得证明. □

引理 8.2.3　设 $K\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ 为有界开集, 则

$$\iint_K(\varepsilon\rho_x^\varepsilon)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\to 0\quad(\varepsilon\to 0).$$

证明　略去上标 ε. 令

$$\begin{aligned}\Omega_1&=\{(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+:\rho(x,t)<\delta\},\\ \Omega_2&=\{(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+:\rho(x,t)\geqslant\delta\},\end{aligned}$$

则对固定的常数 $\delta\in(0,1)$, Ω_1 是 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ 中的开集. 设 K_1 为 Ω_1 中的任一紧集, 选取 $\phi\in C_c^2(\Omega_1)$ 使得 $S=\mathrm{supp}\phi\subset\Omega_1$ 且 $\phi|_{K_1}=1$, $0\leqslant\phi\leqslant 1$.

用 2ρ 乘系统 (8.1.1) 中的第一个方程得

$$(\rho^2)_t+2(\rho^2u)_x-2\rho u\rho_x=\varepsilon(\rho^2)_{xx}-2\varepsilon\rho_x^2.\tag{8.2.13}$$

用函数 ϕ 乘方程 (8.2.13) 并在 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ 上分部积分, 有

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty 2\varepsilon\rho_x^2\phi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ =&\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty(\rho^2\phi_t+2u\rho^2\phi_x+\varepsilon\rho^2\phi_{xx}+2\rho u\rho_x\phi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ \leqslant& C\delta^2+C\delta\left(\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty\rho_x^2\phi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{\frac12},\end{aligned}\tag{8.2.14}$$

其中, C 为与 ε, δ 无关的适当大的正常数.

从式 (8.2.14) 可推出

$$\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty \varepsilon^2\rho_x^2\phi\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\iint_S \varepsilon^2\rho_x^2\phi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C\delta^2,$$

从而

$$\iint_{K_1}\varepsilon^2\rho_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C\delta^2. \tag{8.2.15}$$

由于 $\varepsilon\rho^{\gamma-2}\rho_x^2$ 在 $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中有界, 所以对固定的 $\delta>0$ 有

$$\iint_{K_2}(\varepsilon\rho_x^\varepsilon)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\to 0\quad(\varepsilon\to 0), \tag{8.2.16}$$

其中, K_2 为 Ω_2 中的任一紧集. 把式 (8.2.15), (8.2.16) 相结合就完成了引理 8.2.3 的证明. □

定理 8.2.1 *设 (η,q) 为多方气体动力学系统的弱熵–熵流, 则 $\eta(\rho^\varepsilon,m^\varepsilon)_t+q(\rho^\varepsilon,m^\varepsilon)_x$ 关于黏性解 $(\rho^\varepsilon(x,t),m^\varepsilon(x,t))$ 在 $H^{-1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中紧.*

证明 用 (η_ρ,η_m) 乘方程组 (8.1.1) 得

$$\begin{aligned}&\eta(\rho^\varepsilon,m^\varepsilon)_t+q(\rho^\varepsilon,m^\varepsilon)_x\\=&\varepsilon\eta(\rho^\varepsilon,m^\varepsilon)_{xx}-\varepsilon(\rho_x^\varepsilon,m_x^\varepsilon)\cdot\nabla^2\eta(\rho^\varepsilon,m^\varepsilon)\cdot(\rho_x^\varepsilon,m_x^\varepsilon)^{\mathrm{T}}\\=&I_1+I_2.\end{aligned}$$

由黏性解 $(\rho^\varepsilon,u^\varepsilon)$ 的有界性推出 $\eta(\rho^\varepsilon,m^\varepsilon)_t+q(\rho^\varepsilon,m^\varepsilon)_x$ 在 $W^{-1,\infty}$ 中有界; 根据引理 8.2.2, I_2 在 $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中有界, 而根据引理 8.2.3, I_1 在 $H^{-1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中紧, 因为

$$|\eta(\rho,m)_x|=|\eta_\rho\rho_x+\eta_m m_x|\leqslant C(|\rho_x|+\rho|u_x|).$$

所以应用定理 2.3.1 即可完成定理 8.2.1 的证明. □

8.3 多方气体动力学系统的弱解

定理 8.3.1 *设 $P(\rho)=\dfrac{(\gamma-1)^2}{4\gamma}\rho^\gamma\ (\gamma>1)$, 则存在柯西问题 (8.1.1)–(8.1.2) 的黏性解的子列 $\{(\rho^\varepsilon,u^\varepsilon)\}$ 使得 ρ^ε 点点收敛于 ρ, 而 u^ε 在集合 $\{(x,t):\ \rho(x,t)>0\}$ 上点点收敛于 u. 特别地, $\rho^\varepsilon u^\varepsilon$ 点点收敛于 ρu. 这里极限函数 $(\rho(x,t),\rho(x,t)u(x,t))$ 是柯西问题 (8.0.1)–(8.0.2) 的一个弱解.*

证明 分两种情形证之, 先证 $\gamma>3$ 的情形.

在等式 (8.2.6), (8.2.7) 中任取两个光滑函数 $g(\xi_1)$, $h(\xi_2)$ 并利用定理 2.2.2 有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}} g(\xi_1)\overline{G(\xi_1)}\mathrm{d}\xi_1 \int_{\mathbb{R}} h(\xi_2)\overline{[\theta\xi_2+(1-\theta)u]G(\xi_2)}\mathrm{d}\xi_2\\ &-\int_{\mathbb{R}} h(\xi_2)\overline{G(\xi_2)}\mathrm{d}\xi_2 \int_{\mathbb{R}} g(\xi_1)\overline{[\theta\xi_1+(1-\theta)u]G(\xi_1)}\mathrm{d}\xi_1\\ =&\int_{\mathbb{R}^2} g(\xi_1)h(\xi_2)\overline{G(\xi_1)[\theta\xi_2+(1-\theta)u]G(\xi_2)}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\\ &-\int_{\mathbb{R}^2} g(\xi_1)h(\xi_2)\overline{G(\xi_1)[\theta\xi_1+(1-\theta)u]G(\xi_2)}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2.\end{aligned}$$

上述等式对任意的光滑函数 g, h 成立, 这就蕴涵着

$$\begin{aligned}&\overline{G(\xi_1)}\,\overline{[\theta\xi_2+(1-\theta)u]G(\xi_2)}-\overline{G(\xi_2)}\,\overline{[\theta\xi_1+(1-\theta)u]G(\xi_1)}\\ =&\overline{G(\xi_1)[\theta\xi_2+(1-\theta)u]G(\xi_2)}-\overline{G(\xi_2)[\theta\xi_1+(1-\theta)u]G(\xi_1)}\\ =&\theta(\xi_2-\xi_1)\overline{G(\xi_1)G(\xi_2)}.\end{aligned}\tag{8.3.1}$$

这里上划线表示关于 Young 测度 ν 的常义积分; 例如,

$$\overline{G(\xi)}=\int G(\rho,\xi-u)\mathrm{d}\nu(\rho,u).$$

把等式 (8.3.1) 改写为

$$\frac{\theta}{1-\theta}\left[\frac{\overline{G(\xi_1)G(\xi_2)}}{\overline{G(\xi_1)}\,\overline{G(\xi_2)}}-1\right]=\frac{1}{\xi_2-\xi_1}\left[\frac{\overline{uG(\xi_2)}}{\overline{G(\xi_2)}}-\frac{\overline{uG(\xi_1)}}{\overline{G(\xi_1)}}\right],\tag{8.3.2}$$

其中, ξ_1, $\xi_2\in\zeta$, ζ 是开集

$$O=\bigcup_{(\rho,u)\in\mathrm{supp}\nu}(u-\rho^{\theta},u+\rho^{\theta})$$

的任一连通分支. 我们断言:

$$\text{当 }\gamma>3\text{ 时, }\frac{\overline{uG(\xi)}}{\overline{G(\xi)}}\text{ 在 }\zeta\text{ 内单调非增.}\tag{8.3.3}$$

记 $f_0(\xi)=\dfrac{G(\xi)-\overline{G(\xi)}}{\overline{G(\xi)}}$, 则式 (8.3.2) 等价于

$$\frac{\theta}{1-\theta}\overline{f_0(\xi_1)f_0(\xi_2)}=\frac{1}{\xi_2-\xi_1}\left[\frac{\overline{uG(\xi_2)}}{\overline{G(\xi_2)}}-\frac{\overline{uG(\xi_1)}}{\overline{G(\xi_1)}}\right].\tag{8.3.4}$$

在上式中令 ξ_2 趋于 $\xi_1=\xi$, 形式上有

$$\frac{\theta}{1-\theta}\overline{f_0^2(\xi)}-\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\overline{uG(\xi)}}{\overline{G(\xi)}}\right). \tag{8.3.5}$$

值得注意的是, 等式 (8.3.4) 的右端在分布意义下取极限没有任何困难, 因为 $\overline{G(\xi)}$ 在 ζ 内恒不为零. 然而, 为了等式 (8.3.4) 的左端在 $L^2_{\mathrm{loc}}(\zeta)$ 中可取极限, 需要 $f_0(\xi)\in L^2(\mathbb{R}_\xi)$, 从而 $G(\xi)\in L^2(\mathbb{R}_\xi)$; 但因

$$\|G(\xi)\|^2_{L^2(\mathbb{R}_\xi)}=\rho^{\frac{5-\gamma}{2}}\int_{-1}^{1}(1-\tau^2)^{2\lambda}\mathrm{d}\tau,$$

故 $G(\xi)$ 的 $L^2(\mathbb{R}_\xi)$ 可积性限制了 γ 的范围: $\gamma<5$. 为了说明等式 (8.3.5) 对所有的 $\gamma>3$ 成立, 我们用一族光滑子 $j^\alpha\geqslant 0$ 光滑等式 (8.3.4) 的两端. 记 $f_\alpha=f_0*j^\alpha$, 则

$$\frac{\theta}{1-\theta}\overline{f_\alpha(\xi_1)f_\alpha(\xi_2)}=\frac{1}{\xi_2-\xi_1}\left[\frac{\overline{uG(\xi_2)}}{\overline{G(\xi_2)}}-\frac{\overline{uG(\xi_1)}}{\overline{G(\xi_1)}}\right]*j^\alpha(\xi_1)*j^\alpha(\xi_2).$$

由于上式的左端有界而右端光滑, 因此令 $\xi_2=\xi_1=\xi$ 即得

$$\frac{\theta}{1-\theta}\overline{f_\alpha^2(\xi)}=\frac{1}{\xi_2-\xi_1}\left[\frac{\overline{uG(\xi_2)}}{\overline{G(\xi_2)}}-\frac{\overline{uG(\xi_1)}}{\overline{G(\xi_1)}}\right]*j^\alpha(\xi_1)*j^\alpha(\xi_2)\,\big|_{\xi_2=\xi_1=\xi}. \tag{8.3.6}$$

令 $\alpha\to 0$, 则等式 (8.3.6) 的左端产生一个负测度, 因为当 $\gamma>3$ 时 $1-\theta<0$, 而右端趋于 $\frac{\partial}{\partial\xi}(\frac{\overline{uG(\xi)}}{\overline{G(\xi)}})$. 这就证明了结论 (8.3.3).

为了完成这一情形的证明, 我们需要下述两个引理.

引理 8.3.1 *设 ζ 是所有 $(\rho_\beta,u_\beta)\in$ supp ν 确定的开区间 $(u_\beta-\rho_\beta^\theta,u_\beta+\rho_\beta^\theta)$ 之并, 则 ζ 是连通开集, 即 ζ 是一个开区间.*

引理 8.3.1 中的连通性并不是显然的. 举个例子, 若 ν 的支集只包含两个满足

$$u_1+\rho_1^\theta\leqslant u_2-\rho_2^\theta$$

的点 (ρ_1,u_1) 和 (ρ_2,u_2), 则 ζ 由两个不相交的开区间 $(u_1-\rho_1^\theta,u_1+\rho_1^\theta)$ 和 $(u_2-\rho_2^\theta,u_2+\rho_2^\theta)$ 组成.

引理 8.3.1 的证明 设从属于柯西问题 (8.1.1)–(8.1.2) 的黏性解序列的 Young 测度 ν 的支集 S 包含于其最小的特征三角形:

$$\Sigma_4=\{(\rho,u):w(\rho,u)\leqslant w_0,\ z(\rho,u)\geqslant z_0,\ \rho\geqslant 0\}.$$

显然 $z_0\leqslant z\leqslant w\leqslant w_0$, 如图 8.2 所示. 若 S 不完全包含于真空直线 $\rho=0$, 则可断言直线 $w=w_0$ 与 $z=z_0$ 的交点 P_0 一定在 S 之中, 即

$$P_0\in\ \mathrm{supp}\ \nu. \tag{8.3.7}$$

若 (8.3.7) 得到证明, 则 ζ 就是开区间 (z_0, w_0).

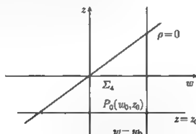


图 8.2　Young 测度 ν 的最小特征三角形

若函数 $\eta = h(\rho)e^{ku}$ $(k \in \mathbb{Z}^+)$ 为方程 (8.2.3) 的解, 则

$$h''(\rho) = \theta^2 k^2 \rho^{\gamma-3} h(\rho). \tag{8.3.8}$$

令 $a(\rho) = \rho^{\frac{3-\gamma}{4}}, s = k\rho^{\frac{\gamma-1}{2}} = k\rho^{\theta}$, 则 $h = a(\rho)\phi(s)$ 为方程 (8.3.8) 的解当且仅当 $\phi(s)$ 满足经典的 Fuchsian 方程

$$\phi''(s) - \left(1 + \frac{\mu}{s^2}\right)\phi(s) = 0, \tag{8.3.9}$$

其中, $\mu = \dfrac{4 - (\gamma - 1)^2}{4(\gamma - 1)^2} < 0$.

方程组 (8.2.4) 中的第二个方程是

$$q_u = \rho\eta_\rho + u\eta_u. \tag{8.3.10}$$

若

$$\eta_k = h(\rho)e^{ku}, \tag{8.3.11}$$

则由式 (8.3.10) 得

$$(q_k)_u = \rho h'(\rho)e^{ku} + kuh(\rho)e^{ku},$$

因而相应于 η_k 的一个熵流为

$$\begin{aligned} q_k &= uh(\rho)e^{ku} + [\rho h'(\rho) - h(\rho)]e^{ku}/k \\ &= \eta_k\left(u + \theta\rho^{\theta}\frac{\phi'(s)}{\phi(s)} - \frac{\gamma+1}{4k}\right). \end{aligned} \tag{8.3.12}$$

若

$$\eta_{-k} = h(\rho)e^{-ku}, \tag{8.3.13}$$

则由式 (8.3.10) 得

$$(q_{-k})_u = \rho h'(\rho)e^{-ku} - kuh(\rho)e^{-ku},$$

因而相应于 η_{-k} 的一个熵流为

$$\begin{aligned} q_{-k} &= uh(\rho)\mathrm{e}^{-ku} + [h(\rho) - \rho h'(\rho)]\mathrm{e}^{-ku}/k \\ &= \eta_{-k}\left(u - \theta\rho^{\theta}\frac{\phi'(\rho)}{\phi(\rho)} + \frac{\gamma+1}{4k}\right). \end{aligned} \tag{8.3.14}$$

于是多方气体动力学系统的两个前进波由 (8.3.11), (8.3.12) 与 (8.3.13), (8.3.14) 给出.

我们可再次运用 Frobenius 方法得到方程 (8.3.9) 的一个级数形式的解:

$$\phi(s) = s^r \sum_{n=0}^{\infty} e_{2n} s^{2n},$$

其中, $r = \dfrac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} > 0$ 是方程 $p(p-1) = \mu$ 的最大根, e_0 为任意正数, e_{2n} 满足

$$e_{2n} = \frac{e_{2(n-1)}}{(2n+j)(2n+j-1)-\mu}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

容易验证 $\phi(s) > 0, \phi'(s) > 0$.

令 $\eta_k = a(\rho)\phi(s)\mathrm{e}^{ku}$, 则利用引理 6.2.1 有

$$\eta_k = a(\rho)\phi(s)\mathrm{e}^{-s}\mathrm{e}^{kw} = \mathrm{e}^{kw}\left(a(\rho) + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \tag{8.3.15}$$

以及

$$\begin{aligned} q_k &= \eta_k\left(u + \theta\rho^{\theta} + \theta\rho^{\theta}\left(\frac{\phi'(s)}{\phi(s)} - 1\right) - \frac{\gamma+1}{4k}\right) \\ &= \eta_k\left(\lambda_2 - \frac{\gamma+1}{4k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) \end{aligned} \tag{8.3.16}$$

对 $\rho > 0$ 成立.

类似地, 令 $\eta_{-k} = a(\rho)\phi(s)\mathrm{e}^{-ku}$, 则

$$\eta_{-k} = a(\rho)\phi(s)\mathrm{e}^{-s}\mathrm{e}^{-kz} = \mathrm{e}^{-kz}\left(a(\rho) + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \tag{8.3.17}$$

以及

$$\begin{aligned} q_{-k} &= \eta_{-k}\left(u - \theta\rho^{\theta} - \theta\rho^{\theta}\left(\frac{\phi'(s)}{\phi(s)} \quad 1\right) + \frac{\gamma+1}{4k}\right) \\ &= \eta_{-k}\left(\lambda_1 + \frac{\gamma+1}{4k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) \end{aligned} \tag{8.3.18}$$

对 $\rho > 0$ 成立.

显然由式 (8.3.15) 和 (8.3.17) 给出的 $\eta_{\pm k}$ 是弱熵, 因为它们在真空直线 $\rho=0$ 上等于零. 利用这两族 Lax 型熵 熵流 (8.3.15), (8.3.16) 和 (8.3.17), (8.3.18) 就能证明式 (8.3.7). 我们用反证法证之. 假设顶点 P_0 不在 $\operatorname{supp}\nu$ 之中, 则把 $(\eta_{\pm k}, q_{\pm k})$ 代入测度方程 (6.4.1) 得

$$\frac{\langle \nu, q_{-k}\rangle}{\langle \nu, \eta_{-k}\rangle}-\frac{\langle \nu, q_{k}\rangle}{\langle \nu, \eta_{k}\rangle}=\frac{\langle \nu, \eta_k q_{-k}-\eta_{-k} q_k\rangle}{\langle \nu, \eta_{-k}\rangle\langle \nu, \eta_{k}\rangle}. \tag{8.3.19}$$

注意到

$$\eta_k q_{-k}-\eta_{-k} q_k=\mathrm{e}^{k(w-z)}\left((\lambda_2-\lambda_1)a(\rho)+O\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

以及 $(w_0, z_0)\notin S$, 有

$$|\langle \nu, \eta_k q_{-k}-\eta_{-k} q_k\rangle|\leqslant a_0\mathrm{e}^{k(w_0-z_0-\delta_0)}$$

对适当的正常数 a_0, δ_0 以及充分大的 k 成立. 另一方面, 存在适当的正常数 a_1、a_2 使得

$$|\langle \nu, \eta_k\rangle|\geqslant a_1\mathrm{e}^{k(w_0-\frac{\delta_0}{4})},\quad |\langle \nu, \eta_{-k}\rangle|\geqslant a_2\mathrm{e}^{-k(z_0+\frac{\delta_0}{4})},$$

这是由于 Σ_4 是最小的特征三角形. 因此

$$\left|\frac{\langle \nu, \eta_k q_{-k}-\eta_{-k} q_k\rangle}{\langle \nu, \eta_{-k}\rangle\langle \nu, \eta_{k}\rangle}\right|\leqslant \frac{a_0}{a_1a_2}\mathrm{e}^{-\frac{k\delta_0}{2}}\to 0\quad (k\to\infty). \tag{8.3.20}$$

现在介绍两族 S 上的新概率测度 $\mu_k^{\pm}$:

$$\langle \mu_k^{\pm}, h\rangle=\frac{\langle \nu, h\eta_{\pm k}\rangle}{\langle \nu, \eta_{\pm k}\rangle},$$

其中, $h=h(\rho,u)$ 为任意的连续函数. 显然 μ_k^+ 和 μ_k^- 关于 k 一致有界. 所以根据 L^∞ 空间的弱 * 紧性, 存在 Q 上的概率测度 $\mu^{\pm}$ 使得 $\langle \mu^{\pm}, h\rangle=\lim\limits_{k\to\infty}\langle \mu_k^{\pm}, h\rangle$ 对 $\{\mu_k^{\pm}\}$ 的某个子列成立, 而且测度 $\mu^{\pm}$ 集中于 S 的边界, 确切地说,

$$\operatorname{supp}\mu^+=S\cap\{(\rho,u): w=w_0\},\quad \operatorname{supp}\mu^-=S\cap\{(\rho,u): z=z_0\}.$$

由方程 (8.3.19) 的左端得

$$\frac{\langle \nu, q_{-k}\rangle}{\langle \nu, \eta_{-k}\rangle}-\frac{\langle \nu, q_{k}\rangle}{\langle \nu, \eta_{k}\rangle}\to\langle \mu^-, \lambda_1\rangle-\langle \mu^+, \lambda_2\rangle\quad (k\to\infty).$$

由于对任何点 $P\in\operatorname{supp}\mu^+$ 有 $\lambda_2(P)>\dfrac{w_0+z_0}{2}$, 而对任何点 $\bar{P}\in\operatorname{supp}\mu^-$ 有 $\lambda_1(\bar{P})<\dfrac{w_0+z_0}{2}$, 所以

$$\langle \mu^-, \lambda_1\rangle-\langle \mu^+, \lambda_2\rangle<0.$$

这与 (8.3.19), (8.3.20) 相矛盾. 于是我们证明了 (8.3.7), 从而完成了引理 8.3.1 的证明. □

引理 8.3.2 设 $\zeta=(z_0,w_0)$ 表示引理 8.3.1 中所述的开连通分支, $u_0=(z_0+w_0)/2$, 则

$$\lim_{\xi\to w_0}\frac{\overline{uG(\xi)}}{\overline{G(\xi)}}\geqslant u_0,\quad \lim_{\xi\to z_0}\frac{\overline{uG(\xi)}}{\overline{G(\xi)}}\leqslant u_0. \tag{8.3.21}$$

证明 根据结论 (8.3.3), 我们可考虑单调函数 $\overline{uG}/\overline{G}$ 在 $\xi\to w_0$ 与 $\xi\to z_0$ 时的单侧极限. 由于使得 $G(\rho,\xi-u)>0$ ($\xi\in(w_0-\varepsilon,w_0)$) 的点 (ρ,u) 一定满足

$$u+\rho^\theta\geqslant w_0-\varepsilon,$$

同时这些点还满足 $u-\rho^\theta\geqslant z_0$, 所以

$$\begin{aligned}\lim_{\xi\to w_0}\frac{\overline{uG(\xi)}}{\overline{G(\xi)}}&\geqslant\min\{u:(\rho,u)\in\operatorname{supp}\nu,\ u+\rho^\theta=w_0\}\\&\geqslant\frac{w_0+z_0}{2}.\end{aligned}$$

同理可证 (8.3.21) 中的后一个不等式. 证毕. □

把 (8.3.21) 与 (8.3.3) 相结合即知 $\overline{uG}/\overline{G}$ 为常数, 所以由等式 (8.3.6) 得 $\overline{(f_\alpha^\pm(\xi))^2}=0$, 从而 $f_\alpha^\pm(\xi)$ 在 ν 的支集上恒等于零. 特别地, 令 $\alpha\to0$ 有

$$f_0^\pm(\xi)=\frac{G(\rho,\xi-u)}{\overline{G(\xi)}}-1=0,\quad (\rho,u)\in\operatorname{supp}\nu.$$

这表明对于 $\gamma>3$ 的情形, Young 测度 ν 是一个点测度.

下面证明 $1<\gamma\leqslant3$ 的情形. 我们用另外一种方法来归约 Young 测度, 对这一情形给一个相对简短的证明, 但需要加上两个假设:

(A_1) 初值 $(\rho_0(x),u_0(x))$ 很小;

(A_2) 柯西问题 (8.1.1), (8.1.2) 的黏性解 $(\rho^\varepsilon(x,t),m^\varepsilon(x,t))$ 有先验估计 $\rho^\varepsilon(x,t)\geqslant c(t)>0$, 其中 $c(t)$ 与 ε 无关, 但可能会因 $t\to\infty$ 而趋于零.

注 8.3.1 条件 (A_1) 确保黏性解很小从而其对应的 Young 测度的支集很小. 关于假设 (A_2) 的评注请参看 [44] 的第 629 页.

根据熵方程 (8.2.3) 及熵-熵流之间的关系 (8.2.2), 构造系统 (8.0.1) 的四对弱熵-熵流:

$$\begin{aligned}(\eta_1,\ q_1)&=(\rho,\ m),\\(\eta_2,\ q_2)&=\left(m,\ \frac{m^2}{\rho}+P(\rho)\right),\end{aligned}$$

$$(\eta_3,\ q_3)=\left(\frac{m^2}{2\rho}+\rho\int^{\rho}\frac{P(s)}{s^2}\mathrm{d}s,\ \frac{m^3}{2\rho^2}+\left(\frac{P(\rho)}{\rho}+\int^{\rho}\frac{P(s)}{s^2}\mathrm{d}s\right)m\right)$$

$$(\eta_4,q_4)=\left(\frac{m^3}{\rho^2}+6m\int^{\rho}\frac{P(s)}{s^2}\mathrm{d}s,\ \frac{m^4}{\rho^3}+3\left(\frac{P(\rho)}{\rho^2}+\frac{2}{\rho}\int^{\rho}\frac{P(s)}{s^2}\mathrm{d}s\right)m^2\right.$$
$$\left.+6\left(P(\rho)\int^{\rho}\frac{P(s)}{s^2}\mathrm{d}s-\int^{\rho}\frac{P^2(s)}{s^2}\mathrm{d}s\right)\right).$$

令

$$v=(\rho,m),\quad f(v)=\left(m,\frac{m^2}{\rho}+P(\rho)\right),$$
$$\bar v=(\bar\rho,\bar m)=(\langle\nu,\rho\rangle,\langle\nu,m\rangle),\quad \bar u=\bar m/\bar\rho,$$

并定义

$$\begin{cases}Q(\eta)=\eta(v)-\eta(\bar v)-\nabla\eta(\bar v)(v-\bar v),\\ Q^*(q)=q(v)-q(\bar v)-\nabla\eta(\bar v)(f(v)-f(\bar v)),\end{cases}\tag{8.3.22}$$

则 $(Q(\eta),Q^*(q))$ 仍是系统 (8.0.1) 的熵–熵流, 如果 (η,q) 是系统 (8.0.1) 的熵–熵流.

因为对固定的 (x,t), $\bar v$ 是数量向量, 所以

$$\bar\eta_1=\rho-\bar\rho,\quad \bar q_1=m-\bar m,$$
$$\bar\eta_2=m-\bar m,\quad \bar q_2=\rho u^2+P(\rho)-\bar\rho\bar u^2-P(\bar\rho)$$

都是系统 (8.0.1) 的熵–熵流.

根据 (8.3.22), 有

$$\begin{aligned}Q(\eta_3)=&\frac{1}{2}\rho u^2-\frac{1}{2}\bar\rho\bar u^2+\frac{1}{2}\bar u^2(\rho-\bar\rho)-\bar u(m-\bar m)+\rho\int^{\rho}\frac{P(s)}{s^2}\mathrm{d}s\\&-\bar\rho\int^{\bar\rho}\frac{P(s)}{s^2}\mathrm{d}s-\left(\int^{\bar\rho}\frac{P(s)}{s^2}\mathrm{d}s+\frac{P(\bar\rho)}{\bar\rho}(\rho-\bar\rho)\right)\\=&\frac{1}{2}\rho(u-\bar u)^2+Q\left(\rho\int^{\rho}\frac{P(s)}{s^2}\mathrm{d}s\right),\\Q^*(q_3)=&\frac{1}{2}m(u-\bar u)^2+(u-\bar u)\big(P(\rho)-P(\bar\rho)\big)\\&+u\Big(\rho\int_{\bar\rho}^{\rho}\frac{P(s)}{s^2}\mathrm{d}s-\frac{P(\bar\rho)}{\bar\rho}(\rho-\bar\rho)\Big),\\Q(\eta_4)=&6m\int_{\bar\rho}^{\rho}\frac{P(s)}{s^2}\mathrm{d}s+\rho(u-\bar u)^2(u+2\bar u)-\frac{6\bar u}{\bar\rho}P(\bar\rho)(\rho-\bar\rho),\\Q^*(q_4)=&\big(6u^2\rho+6P(\rho)\big)\int_{\bar\rho}^{\rho}\frac{P(s)}{s^2}\mathrm{d}s-6\int_{\bar\rho}^{\rho}\frac{P^2(s)}{s^2}\mathrm{d}s\\&+3P(\rho)(u^2-\bar u^2)+u\rho(u-\bar u)^2(u+2\bar u)-\frac{6uP(\rho)}{\bar\rho}(m-\bar m).\end{aligned}$$

记 $(\tilde{\eta}_3,\tilde{q}_3)=(Q(\eta_3),Q^*(q_3))$, $(\tilde{\eta}_4,\tilde{q}_4)=(Q(\eta_4),Q^*(q_4))$, 则 $(\tilde{\eta}_3,\tilde{q}_3)$ 和 $(\tilde{\eta}_4,\tilde{q}_4)$ 也是系统 (8.0.1) 的熵 熵流. 对于多方气体即 $P(\rho)=c\rho^\gamma$ $(\gamma>1)$ 的情形, 容易验证 $(\tilde{\eta}_i,\tilde{q}_i)$ $(i=1,2,3,4)$ 均满足 $H^{-1}_{\rm loc}$ 紧性, 因而它们满足测度方程

$$\left\langle\nu,\begin{vmatrix}\tilde{\eta}_i & \tilde{q}_i\\ \tilde{\eta}_j & \tilde{q}_j\end{vmatrix}\right\rangle=\begin{vmatrix}\langle\nu,\tilde{\eta}_i\rangle & \langle\nu,\tilde{q}_i\rangle\\ \langle\nu,\tilde{\eta}_j\rangle & \langle\nu,\tilde{q}_j\rangle\end{vmatrix}\quad(1\leqslant i<j\leqslant 4).\tag{8.3.23}$$

利用 (8.3.23) 得

$$\langle\nu,\tilde{\eta}_1\tilde{q}_2-\tilde{\eta}_2\tilde{q}_1\rangle=\langle\nu,\big(P(\rho)-P(\bar{\rho})\big)(\rho-\bar{\rho})-(u-\bar{u})^2\rho\rho\rangle=0,\tag{8.3.24}$$

$$\begin{aligned}&\langle\nu,\tilde{\eta}_1\tilde{q}_3-\tilde{\eta}_3\tilde{q}_1\rangle\\ =&\left\langle\nu,(u-\bar{u})(\rho-\bar{\rho})P(\rho)-\bar{\rho}\rho(u-\bar{u})\int_{\bar{\rho}}^{\rho}\frac{P(s)}{s^2}{\rm d}s-\frac{1}{2}\bar{\rho}\rho(u-u)^3\right\rangle\\ =&0\end{aligned}\tag{8.3.25}$$

以及

$$\begin{aligned}&\langle\nu,\tilde{\eta}_1\tilde{q}_4-\tilde{\eta}_4\tilde{q}_1\rangle\\ =&\langle\nu,3(\rho-\bar{\rho})[2Q_1+(u^2-\bar{u}^2)P(\rho)]-\bar{\rho}\rho(u-\bar{u})^3(u+2\bar{u})\\ &-6\bar{\rho}\rho u(u-\bar{u})\int_{\bar{\rho}}^{\rho}\frac{P(s)}{s^2}{\rm d}s\rangle\\ =&0,\end{aligned}\tag{8.3.26}$$

其中

$$Q_1=P(\rho)\int_{\bar{\rho}}^{\rho}\frac{P(s)}{s^2}{\rm d}s-\int_{\bar{\rho}}^{\rho}\frac{P^2(s)}{s^2}{\rm d}s.$$

用 (8.3.26) $-\,6\bar{u}\times$ (8.3.25) 有

$$\begin{aligned}0=&\Big\langle\nu,3(\rho-\bar{\rho})[2Q_1+(u-\bar{u})^2P(\rho)]-\bar{\rho}\rho(u-\bar{u})^4\\ &-6\bar{\rho}\rho(u-\bar{u})^2\int_{\bar{\rho}}^{\rho}\frac{P(s)}{s^2}{\rm d}s\Big\rangle.\end{aligned}\tag{8.3.27}$$

从 (8.3.25) 可推出

$$\left\langle\nu,\frac{1}{2}\bar{\rho}\rho(u-\bar{u})^3\right\rangle=\left\langle\nu,\ u-\bar{u})(\rho-\bar{\rho})P(\rho)-\bar{\rho}\rho(u-\bar{u})\int_{\bar{\rho}}^{\rho}\frac{P(s)}{s^2}{\rm d}s\right\rangle,$$

故运用测度方程

$$\langle\nu,\tilde{\eta}_2\tilde{q}_3-\tilde{\eta}_3\tilde{q}_2\rangle=\langle\nu,\tilde{\eta}_2\rangle\langle\nu,\tilde{q}_3\rangle-\langle\nu,\tilde{\eta}_3\rangle\langle\nu,\tilde{q}_2\rangle$$

即得

$$
\begin{aligned}
0=&\langle\nu,\ \rho u^2-\bar{\rho}\bar{u}^2\rangle\left\langle\nu,\ \frac{1}{2}\rho(u-\bar{u})^2+\int_{\bar{\rho}}^{\rho}\frac{P(s)}{s^2}\mathrm{d}s\right\rangle\\
&+\langle\nu,P(\rho)\rangle\langle\nu,Q_2\rangle-\langle\nu,P(\rho)Q_2\rangle\\
&+\frac{1}{2}\langle\nu,P(\rho)\rangle\langle\nu,\rho(u-u)^2\rangle-\frac{1}{2}\langle\nu,\rho P(\rho)(u-\bar{u})^2\rangle\\
&+\langle\nu,\rho(u-\bar{u})^2(P(\rho)-P(\bar{\rho}))\rangle,
\end{aligned}\tag{8.3.28}
$$

其中

$$
Q_2=\rho\int_{\rho}^{\rho}\frac{P(s)}{s^2}\mathrm{d}s-\frac{P(\bar{\rho})}{\bar{\rho}}(\rho-\bar{\rho}).
$$

由于 $\rho\geqslant\rho_0>0$, 所以 $\bar{\rho}\geqslant\rho_0>0$. 定义

$$
O_{ij}=\langle\nu,O((u-\bar{u})^i(\rho-\bar{\rho})^j)\rangle,
$$

则经过简单计算, 有

$$
\bar{\eta}_3=\frac{1}{2}\bar{\rho}(u-u)^2+\frac{P'(\bar{\rho})}{2\bar{\rho}}(\rho-\bar{\rho})^2+O_{21}+O_{03},\tag{8.3.29}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{\eta}_4=&\frac{6P(\bar{\rho})}{\bar{\rho}}(u-\bar{u})(\rho-\bar{\rho})+\frac{3\bar{u}P'(\bar{\rho})}{\bar{\rho}}(\rho-\bar{\rho})^2\\
&+3\bar{u}\bar{\rho}(u-\bar{u})^2+O_{21}+O_{30}+O_{12}+O_{03},
\end{aligned}\tag{8.3.30}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{q}_3=&P'(\bar{\rho})(u-\bar{u})(\rho-\bar{\rho})+\frac{\bar{u}P'(\bar{\rho})}{2\bar{\rho}}(\rho-\bar{\rho})^2\\
&+\frac{\bar{u}\bar{\rho}}{2}(u-\bar{u})^2+O_{21}+O_{12}+O_{30}+O_{03},
\end{aligned}\tag{8.3.31}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
\bar{q}_4=&\left(\frac{3P'(\bar{\rho})P(\bar{\rho})}{\bar{\rho}^2}+3\bar{u}^2\frac{P'(\bar{\rho})}{\bar{\rho}}\right)(\rho-\bar{\rho})^2\\
&+\left(6\bar{u}P'(\bar{\rho})+\frac{6\bar{u}P(\bar{\rho})}{\bar{\rho}}\right)(u-\bar{u})(\rho\quad\bar{\rho})\\
&+3\big(\bar{\rho}\bar{u}^2+P(\bar{\rho})\big)(u-\bar{u})^2+O_{30}+O_{21}+O_{12}+O_{03}.
\end{aligned}\tag{8.3.32}
$$

从 (8.3.27) 可推出

$$
\begin{aligned}
&\left\langle\nu,\left(\frac{2P''(\bar{\rho})P(\bar{\rho})+(P'(\bar{\rho}))^2}{\bar{\rho}^2}-\frac{2P'(\bar{\rho})P(\bar{\rho})}{\bar{\rho}^3}\right)(\rho-\rho)^4\right.\\
&\left.+\frac{3P'(\rho)P(\bar{\rho})}{\rho^2}(\rho-\bar{\rho})^3-\bar{\rho}^2(u-\bar{u})^4-3P(\bar{\rho})(u-\bar{u})^2(\rho-\bar{\rho})\right\rangle\\
&+O_{05}+O_{41}+O_{23}=0,
\end{aligned}\tag{8.3.33}
$$

而从 (8.3.28) 可推出

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{P'(\bar{\rho})}{2}+\frac{\bar{\rho}}{4}P''(\bar{\rho})\right)\langle\nu,(\rho-\bar{\rho})^2\rangle\langle\nu,(u-\bar{u})^2\rangle\\
&+\left(\frac{P'(\bar{\rho})}{2}+\frac{\bar{\rho}}{4}P''(\bar{\rho})\right)\langle\nu,(\rho-\bar{\rho})^2(u-\bar{u})^2\rangle\\
&+\frac{2P'^2(\bar{\rho})-5\bar{\rho}P'(\bar{\rho})P''(\bar{\rho})}{12\rho^2}\langle\nu,(\rho-\bar{\rho})^4\rangle\\
&+\frac{\bar{\rho}^2}{2}(\langle\nu,(u-\bar{u})^2\rangle)^2+\frac{P''(\bar{\rho})P'(\bar{\rho})}{4\bar{\rho}}(\langle\nu,(\rho-\bar{\rho})^2\rangle)^2\\
&+\frac{1}{2}\bar{\rho}P'(\bar{\rho})\langle\nu,(\rho-\bar{\rho})(u-\bar{u})^2\rangle-\frac{(P'(\bar{\rho}))^2}{2\bar{\rho}}\langle\nu,(\rho-\bar{\rho})^3\rangle\\
&+O_{21}O_{20}+O_{20}O_{03}+O_{02}O_{03}+O_{21}O_{02}+O_{05}+O_{23}=0. \qquad (8.3.34)
\end{aligned}
$$

于是由 $(8.3.33)+(8.3.34)\times\dfrac{6P(\bar{\rho})}{\bar{\rho}P'(\bar{\rho})}$ 得

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{2P'^2(\bar{\rho})-P(\bar{\rho})P''(\bar{\rho})}{2\bar{\rho}^2}-\frac{P'(\bar{\rho})P(\bar{\rho})}{\bar{\rho}^3}\right)\langle\nu,(\rho-\bar{\rho})^4\rangle\\
&+\frac{3P(\bar{\rho})P''(\bar{\rho})}{2\bar{\rho}^2}(\langle\nu,(\rho-\bar{\rho})^2\rangle)^2\\
&+\left(\frac{3P(\bar{\rho})}{\bar{\rho}}+\frac{3P(\bar{\rho})P''(\bar{\rho})}{2P'(\bar{\rho})}\right)(\langle\nu,(\rho-\bar{\rho})^2\rangle\langle\nu,(u-\bar{u})^2\rangle\\
&+\langle\nu,(\rho-\bar{\rho})^2(u-\bar{u})^2\rangle)+\frac{3\bar{\rho}P(\bar{\rho})}{P'(\bar{\rho})}(\langle\nu,(u-\bar{u})^2\rangle)^2\\
=&\bar{\rho}^2\langle\nu,(u-\bar{u})^4\rangle+O_{05}+O_{41}+O_{23}\\
&+O_{21}O_{20}+O_{21}O_{02}+O_{20}O_{03}+O_{02}O_{03}. \qquad (8.3.35)
\end{aligned}
$$

直接的计算表明

$$
\begin{aligned}
&\langle\nu,\bar{\eta}_3\bar{q}_4-\bar{\eta}_4\bar{q}_3\rangle\\
=&\Big\langle\nu,\frac{1}{2}\rho P(\rho)(u-\bar{u})^4\\
&+\rho P(\bar{\rho})(u-\bar{u})^4+6Q_1Q_2-3\rho(u-\bar{u})^2\int_{\bar{\rho}}^{\rho}\frac{P^2(s)}{s^2}ds\\
&-6\rho(u-\bar{u})^2P(\bar{\rho})\int_{\bar{\rho}}^{\rho}\frac{P(s)}{s^2}ds-3(\rho-\bar{\rho})(u-\bar{u})^2\frac{P(\bar{\rho})}{\bar{\rho}}P(\rho)\Big\rangle\\
=&\Big\langle\nu,\frac{3}{2}\bar{\rho}P(\bar{\rho})(u-\bar{u})^4-\frac{3P(\bar{\rho})P'(\bar{\rho})}{\bar{\rho}}(u-\bar{u})^2(\rho-\bar{\rho})^2\\
&+\frac{3P(\bar{\rho})(P'(\rho))^3}{2\rho^3}(\rho-\bar{\rho})^4\Big\rangle+O_{41}+O_{23}+O_{05}.
\end{aligned}
$$

因此由式 (8.3.29)~(8.3.32) 及测度方程

$$\langle \nu, \tilde{\eta}_3\tilde{q}_4 - \tilde{\eta}_4\tilde{q}_3\rangle = \langle \nu, \tilde{\eta}_3\rangle\langle \nu, \tilde{q}_4\rangle - \langle \nu, \tilde{\eta}_4\rangle\langle \nu, \tilde{q}_3\rangle$$

得

$$\begin{aligned}
&\left\langle \nu, \frac{3}{2}\bar{\rho}P(\bar{\rho})(u-\bar{u})^4 - \frac{3P(\bar{\rho})P'(\bar{\rho})}{\bar{\rho}}(u-\bar{u})^2(\rho-\rho)^2 + \frac{3P(\rho)P'^2(\rho)}{2\bar{\rho}^3}(\rho-\bar{\rho})^4\right\rangle \\
=&\frac{3}{2}\bar{\rho}P(\bar{\rho})(\langle \nu, (u-\bar{u})^2\rangle)^2 + \frac{3P'^2(\bar{\rho})P(\bar{\rho})}{2\bar{\rho}^3}(\langle \nu, (\rho-\bar{\rho})^2\rangle)^2 \\
&+\frac{3P'(\bar{\rho})P(\rho)}{\bar{\rho}}\langle \nu, (\rho-\bar{\rho})^2\rangle\langle \nu, (u-\bar{u})^2\rangle \\
&-\frac{6P'(\bar{\rho})P(\bar{\rho})}{\bar{\rho}}\langle \nu, (\rho-\bar{\rho})(u-\bar{u})\rangle + \text{Error},
\end{aligned} \tag{8.3.36}$$

其中, Error 表示高阶误差:

$$\begin{aligned}
\text{Error} =& O_{41} + O_{23} + O_{05} + O_{20}O_{30} + O_{20}O_{21} + O_{20}O_{12} \\
&+O_{20}O_{03} + O_{02}O_{30} + O_{02}O_{21} + O_{02}O_{12} \\
&+O_{02}O_{03} + O_{11}O_{21} + O_{11}O_{12} + O_{11}O_{30} + O_{11}O_{03}.
\end{aligned}$$

现在令 $P(\rho) = k^2\rho^\gamma$ $(1 < \gamma \leqslant 3)$, 则由等式 (8.3.31) 和 (8.3.36) 得

$$\begin{aligned}
&\frac{\gamma^2-\gamma}{2}k^4\bar{\rho}^{2\gamma-4}\langle \nu, (\rho-\bar{\rho})^4\rangle + \frac{3}{2}(\gamma^2-\gamma)k^4\bar{\rho}^{2\gamma-4}(\langle \nu, (\rho-\bar{\rho})^2\rangle)^2 \\
&+\frac{3}{2}(\gamma+1)k^2\bar{\rho}^{\gamma-1}(\langle \nu, (\rho-\bar{\rho})^2\rangle\langle \nu, (u-\bar{u})^2\rangle \\
&+\langle \nu, (\rho-\bar{\rho})^2(u-\bar{u})^2\rangle) + \frac{3}{\gamma}\bar{\rho}^2(\langle \nu, (u-\bar{u})^2\rangle)^2 \\
=&\bar{\rho}^2\langle \nu, (u-\bar{u})^4\rangle + O_{05} + O_{41} + O_{23} \\
&+O_{21}O_{20} + O_{21}O_{02} + O_{20}O_{03} + O_{02}O_{03}
\end{aligned} \tag{8.3.37}$$

和

$$\begin{aligned}
&\left\langle \nu, \frac{3}{2}k^2\bar{\rho}^{\gamma+1}(u-\bar{u})^4 - 3\gamma k^4\bar{\rho}^{2\gamma-2}(u-\bar{u})^2(\rho-\bar{\rho})^2\right\rangle \\
=&\frac{3}{2}k^2\bar{\rho}^{\gamma+1}(\langle \nu, (u-\bar{u})^2\rangle)^2 + \frac{3}{2}k^6\gamma^2\bar{\rho}^{3\gamma-5}(\langle \nu, (\rho-\bar{\rho})^2\rangle)^2 \\
&+3\gamma k^4\bar{\rho}^{2\gamma-2}\langle \nu, (\rho-\bar{\rho})^2\rangle\langle \nu, (u-\bar{u})^2\rangle \\
&-6\gamma k^4\bar{\rho}^{2\gamma-2}\langle \nu, (\rho-\bar{\rho})(u-\bar{u})\rangle + \frac{3}{2}k^6\gamma^2\bar{\rho}^{3\gamma-5}\langle \nu, (\rho-\rho)^4\rangle \\
&+\text{Error},
\end{aligned} \tag{8.3.38}$$

所以计算 (8.3.37) $\times \dfrac{2\gamma k^2\bar{\rho}^{\gamma-1}}{\gamma+1}$ + (8.3.38), 有

$$\begin{aligned}0=&\frac{3-\gamma}{2(\gamma+1)}k^2\bar{\rho}^{\gamma+1}\langle\nu,(u-\bar{u})^4\rangle\\&+\frac{5\gamma+1}{2(\gamma+1)}\gamma^2k^6\bar{\rho}^{3\gamma-5}\langle\nu,(\rho-\bar{\rho})^4\rangle\\&+\frac{3(3-\gamma)}{2(\gamma+1)}k^2\bar{\rho}^{\gamma+1}(\langle\nu,(u-\bar{u})^2\rangle)^2\\&+\frac{3(\gamma-3)}{2(\gamma+1)}\gamma^2k^6\bar{\rho}^{3\gamma-5}(\langle\nu,(\rho-\bar{\rho})^2\rangle)^2\\&+6\gamma k^4\bar{\rho}^{2\gamma-2}(\langle\nu,(u-\bar{u})(\rho-\bar{\rho})\rangle)^2+\text{Error}.\end{aligned}\tag{8.3.39}$$

若 $1<\gamma<3$, 则根据柯西不等式

$$(\langle\nu,(\rho-\bar{\rho})^2\rangle)^2\leqslant\langle\nu,(\rho-\bar{\rho})^4\rangle$$

可由 (8.3.39) 推出

$$\begin{aligned}&\frac{3-\gamma}{2(\gamma+1)}k^2\bar{\rho}^{\gamma+1}\langle\nu,(u-\bar{u})^4\rangle\\&+\frac{4(\gamma-1)}{\gamma+1}\gamma^2k^6\bar{\rho}^{3\gamma-5}\langle\nu,(\rho-\bar{\rho})^4\rangle\\&+\frac{3(3-\gamma)}{2(\gamma+1)}k^2\bar{\rho}^{\gamma+1}(\langle\nu,(u-\bar{u})^2\rangle)^2\\&+6\gamma k^4\bar{\rho}^{2\gamma-2}(\langle\nu,(u-\bar{u})(\rho-\bar{\rho})\rangle)^2+\text{Error}\\\leqslant&\,0,\end{aligned}\tag{8.3.40}$$

这蕴涵着

$$C_1\langle\nu,(u-\bar{u})^4\rangle+C_2\langle\nu,(\rho-\bar{\rho})^4\rangle\leqslant 0$$

对两个适当的正常数 C_1 与 C_2 成立, 当 ν 的支集充分小时, 它们只依赖于 k, $\bar{\rho}$ 和 γ. 因此 ν 是 Dirac 测度, 它的支集只包含点 (ρ,u).

若 $\gamma=3$, 则首先由式 (8.3.40) 得到 ν 集中在直线 $\rho=\bar{\rho}$ 上, 然后再把它归结到点 (u,ρ), 因为我们可从式 (8.3.24) 推出

$$\langle\nu,(u-\bar{u})^2\rangle=\gamma k^2\bar{\rho}^{\gamma-3}\langle\nu,(\rho-\bar{\rho})^2\rangle+O_{21}+O_{03}.$$

所以当 $1<\gamma\leqslant 3$ 时, Young 测度也是 Dirac 测度.

根据补偿列紧理论, 定理 8.3.1 获得证明. □

8.4 河流方程组的广义解

作为定理 8.3.1 的应用, 下面研究河流方程组, 即刻画河流的垂直深度 ρ 和平均速度 u 的数学模型

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + P(\rho))_x + a(x)\rho + c\rho u|u| = 0 \end{cases} \tag{8.4.1}$$

带有界可测初值

$$(\rho(x,0), u(x,0)) = (\rho_0(x), u_0(x)) \quad (\rho_0(x) \geqslant 0) \tag{8.4.2}$$

的柯西问题, 其中函数 $a(x)$ 相当于地形的坡度, $c\rho|u|$ 相当于磨擦力, c 是非负常数.

考虑相应的抛物型方程组

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = \varepsilon\rho_{xx}, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + P(\rho))_x + a(x)\rho + c\rho u|u| = \varepsilon(\rho u)_{xx} \end{cases} \tag{8.4.3}$$

带光滑初值

$$(\rho(x,0), (\rho u)(x,0)) = (\rho_0^\varepsilon(x), \rho_0^\varepsilon(x)u_0^\varepsilon(x)) \tag{8.4.4}$$

的柯西问题, 其中, $(\rho_0^\varepsilon(x), \rho_0^\varepsilon(x)u_0^\varepsilon(x))$ 由式 (8.1.3) 给出.

类似于定理 8.3.1, 有本节的主要结果:

定理 8.4.1　*设 $|a(x)| \leqslant K$, 初值 $(\rho_0(x), u_0(x))$ 有界可测且 $\rho_0(x) \geqslant 0$. 如果函数 $P(\rho) \in C^2(0,\infty)$ 满足 $P'(\rho) > 0$, $2P'(\rho) + \rho P''(\rho) \geqslant 0$, 并且*

$$\int_d^\infty \frac{\sqrt{P'(\rho)}}{\rho} d\rho = \infty, \quad \int_0^d \frac{\sqrt{P'(\rho)}}{\rho} d\rho < \infty, \quad \forall d > 0,$$

那么对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 柯西问题 (8.4.3) – (8.4.4) 的黏性解 $(\rho^\varepsilon, \rho^\varepsilon u^\varepsilon)$ 存在且满足

$$0 < c(\varepsilon, t) \leqslant \rho^\varepsilon(x,t) \leqslant M(t), \quad \|u^\varepsilon(x,t)\|_{L^\infty} \leqslant M(t), \tag{8.4.5}$$

其中, 函数 $M(t) > 0$ 在 $[0,\infty)$ 上连续, $c(\varepsilon,t) > 0$ 可能会因 $\varepsilon \to 0$ 或 $t \to \infty$ 而趋于零. 进一步, 对于 $\gamma > 1$ 的多方气体即 $P(\rho) = k^2\rho^\gamma$ 的情形, 存在黏性解的子列 $\{(\rho^\varepsilon(x,t), \rho^\varepsilon(x,t)u^\varepsilon(x,t))\}$ 几乎处处收敛于柯西问题 (8.4.1) (8.4.2) 的一个整体弱解 $(\rho(x,t), \rho(x,t)u(x,t))$.

证明 完全相似于定理 8.3.1 的证明, 只要得到 L^∞ 估计 (8.4.5), 就能用前面几节介绍的紧性框架完成本定理的证明.

分别用 (w_ρ, w_m) 和 $(\bar{z}_\rho, \bar{z}_m)$ $(\bar{z} = \quad z)$ 乘方程组 (8.4.3) 得

$$
\begin{aligned}
& w_t + \lambda_2 w_x + a(x) + \frac{c|u|}{2}(w - \bar{z}) \\
=& \varepsilon w_{xx} + \frac{2\varepsilon}{\rho}\rho_x w_x - \frac{\varepsilon}{2\rho^2\sqrt{P'(\rho)}}(2P' + \rho P'')\rho_x^2 \\
\leqslant& \varepsilon w_{xx} + \frac{2\varepsilon}{\rho}\rho_x w_x,
\end{aligned} \tag{8.4.6}
$$

$$
\begin{aligned}
& \bar{z}_t + \lambda_1 \bar{z}_x - a(x) + \frac{c|u|}{2}(\bar{z} - w) \\
=& \varepsilon \bar{z}_{xx} - \frac{2\varepsilon}{\rho}\rho_x \bar{z}_x - \frac{\varepsilon}{2\rho^2\sqrt{P'(\rho)}}(2P' + \rho P'')\rho_x^2 \\
\leqslant& \varepsilon \bar{z}_{xx} - \frac{2\varepsilon}{\rho}\rho_x \bar{z}_x.
\end{aligned} \tag{8.4.7}
$$

作变换

$$
w = X + Kt, \quad \bar{z} = Y + Kt,
$$

其中, K 是函数 $a(x)$ 的界, 则由 (8.4.6), (8.4.7) 有

$$
\begin{cases}
X_t + \lambda_2 X_x + \dfrac{c|u|}{2}(X - Y) \leqslant \varepsilon X_{xx} + \dfrac{2\varepsilon}{\rho}\rho_x X_x, \\
Y_t + \lambda_1 Y_x + \dfrac{c|u|}{2}(Y - X) \leqslant \varepsilon Y_{xx} - \dfrac{2\varepsilon}{\rho}\rho_x Y_x,
\end{cases} \tag{8.4.8}
$$

以及

$$
X|_{t=0} = w|_{t=0} \leqslant N_1, \quad Y|_{t=0} = \bar{z}|_{t=0} \leqslant N_1, \tag{8.4.9}
$$

其中, 常数 N_1 只依赖于初值 $(\rho_0(x), u_0(x))$ 的 L^∞ 范数.

下面将应用极值原理证明

$$
X(x,t) \leqslant N_1, \quad Y(x,t) \leqslant N_1, \quad \forall (x,t) \in \mathbf{R} \times [0,T]. \tag{8.4.10}
$$

这蕴涵着

$$
w \leqslant N_1 + Kt, \quad z \geqslant -N_1 - Kt, \quad \forall (x,t) \in \mathbf{R} \times [0,T],
$$

从而 ρ^ε 与 u^ε 有界.

为此, 作下述变换

$$
X = X - N_1 - \frac{N(x^2 + CLe^t)}{L^2}, \quad \bar{Y} = Y - N_1 - \frac{N(x^2 + CLe^t)}{L^2},
$$

其中, C, L 为正常数; N 为 X, Y 在 $\mathbb{R}\times[0,T]$ 中的上界 (依据局部解的性质, $N=N(T)$ 存在). 由 (8.4.8), (8.4.9), 我们容易看出函数 $\bar{X}$ 与 $\bar{Y}$ 满足不等式

$$\begin{aligned}&\bar{X}_t+\lambda_2\bar{X}_x+\frac{c|u|}{2}(\bar{X}-\bar{Y})+\left(CLe^t+2\lambda_2x-2\varepsilon-\frac{4\varepsilon}{\rho}\rho_xx\right)\frac{N}{L^2}\\&\leqslant\varepsilon\bar{X}_{xx}+\frac{2\varepsilon}{\rho}\rho_x\bar{X}_x,\end{aligned}\tag{8.4.11}$$

以及

$$\begin{aligned}&\bar{Y}_t+\lambda_1\bar{Y}_x+\frac{c|u|}{2}(\bar{Y}-\bar{X})+\left(CLe^t+2\lambda_1x-2\varepsilon+\frac{4\varepsilon}{\rho}\rho_xx\right)\frac{N}{L^2}\\&\leqslant\varepsilon\bar{Y}_{xx}-\frac{2\varepsilon}{\rho}\rho_x\bar{Y}_x\end{aligned}\tag{8.4.12}$$

而且

$$\bar{X}_0(x)=X_0(x)-N_1-\frac{CN}{L}<0,\quad \bar{Y}_0(x)=Y_0(x)-N_1-\frac{CN}{L}<0,\tag{8.4.13}$$

$$\bar{X}(\pm L,t)<0,\quad \bar{Y}(\pm L,t)<0,\tag{8.4.14}$$

这是由于 N 为 X, Y 的上界.

从 (8.4.11)~(8.4.14) 可推出

$$\bar{X}(x,t)<0,\quad \bar{Y}(x,t)<0,\quad \forall(x,t)\in(-L,L)\times(0,T).\tag{8.4.15}$$

下面用反证法证之. 假设结论 (8.4.15) 不成立, 令

$$\bar{t}=\sup\{t:\ \bar{X}(x,\tau)<0,\ \bar{Y}(x,\tau)<0,\ \forall(x,\tau)\in(-L,L)\times[0,t)\},$$

则由函数的连续性, 存在 $(\bar{x},\bar{t})\in(-L,L)\times(0,T)$ 使得 $\bar{X}(\bar{x},\bar{t})=0$, $\bar{Y}(\bar{x},\bar{t})\leqslant 0$ 或者 $\bar{Y}(\bar{x},\bar{t})=0$, $\bar{X}(\bar{x},\bar{t})\leqslant 0$. 不妨设 $\bar{X}(\bar{x},\bar{t})=0$, $\bar{Y}(\bar{x},\bar{t})\leqslant 0$, 则在点 $(\bar{x},\bar{t})$ 处, $\bar{X}_t\geqslant 0$, $\bar{X}_x=0$, $\bar{X}_{xx}\leqslant 0$, 因而

$$\bar{X}_t+\lambda_2\bar{X}_x-\varepsilon\bar{X}_{xx}-\frac{2\varepsilon}{\rho}\rho_x\bar{X}_x\geqslant 0.\tag{8.4.16}$$

然而由局部解 ρ^ε 的性质, 可选取充分大的 C 使得

$$CLe^t+2\lambda_2x-2\varepsilon-\frac{4\varepsilon}{\rho}\rho_xx>0\tag{8.4.17}$$

在 $(-L,L)\times(0,T)$ 内恒成立. 显然式 (8.4.16), (8.4.17) 与 (8.4.11) 矛盾, 所以结论 (8.4.15) 成立. 因此对任意 $(x_0,t_0)\in(-L,L)\times(0,T)$ 有

$$X(x_0,t_0)<N_1+\frac{N(x_0^2+CLe^{t_0})}{L^2},\quad Y(x_0,t_0)<N_1+\frac{N(x_0^2+CLe^{t_0})}{L^2}.$$

在上式中令 $L\to\infty$ 就产生我们想得到的估计 (8.4.10). 证毕. □

8.5 等温气体动力学系统的弱解

本节我们讨论等温气体即 $\gamma=1$ 的多方气体动力学系统

$$\begin{cases} \rho_t+(\rho u)_x=0, \\ (\rho u)_t+(\rho u^2+\rho)_x=0 \end{cases} \tag{8.5.1}$$

带有界可测初值

$$(\rho(x,0),\rho(x,0)u(x,0))=(\rho_0(x),\rho_0(x)u_0(x)) \quad (\rho_0(x)\geqslant 0) \tag{8.5.2}$$

的柯西问题整体弱解的存在性.

经过简单计算, 系统 (8.5.1) 的两个特征值为

$$\lambda_1=\frac{m}{\rho}-1, \quad \lambda_2=\frac{m}{\rho}+1,$$

其相应的两个右特征向量为

$$\boldsymbol{r}_1=(1,\lambda_1)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{r}_2=(1,\lambda_2)^{\mathrm{T}},$$

从而

$$\nabla\lambda_1\cdot\boldsymbol{r}_1=-\frac{1}{\rho}, \quad \nabla\lambda_2\cdot\boldsymbol{r}_2=\frac{1}{\rho},$$

其中, $m=\rho u$ 表示动量. 因此系统 (8.5.1) 真正非线性, 但在 $\rho=0$ 上非严格双曲, 这是由于速度 u 的无限性. 这个奇性是处理系统 (8.5.1) 的主要困难之一. 此外, 系统 (8.5.1) 的两个黎曼不变量为

$$w(\rho,m)=\rho e^{\frac{m}{\rho}}, \quad z(\rho,m)=\rho e^{-\frac{m}{\rho}}.$$

考虑等温流的黏性扰动

$$\begin{cases} \rho_t+m_x=\varepsilon\rho_{xx}, \\ m_t+\left(\dfrac{m^2}{\rho}+\rho\right)_x=\varepsilon m_{xx} \end{cases} \tag{8.5.3}$$

带光滑初值

$$(\rho(x,0),m(x,0))=(\rho_0^\varepsilon(x),m_0^\varepsilon(x))=(\rho_0^\varepsilon(x),\rho_0^\varepsilon(x)u_0^\varepsilon(x)) \tag{8.5.4}$$

的柯西问题, 其中 $(\rho_0^\varepsilon(x),\rho_0^\varepsilon(x)u_0^\varepsilon(x))$ 由式 (8.1.3) 给出.

引理 8.5.1　*设初值满足*

$$0 \leqslant \rho_0(x) \leqslant M, \quad \rho_0(x)|u_0(x)| \leqslant \rho_0(x)(M + |\ln \rho_0(x)|), \tag{8.5.5}$$

则对任意给定的 $\varepsilon > 0$, *柯西问题* (8.5.3)–(8.5.4) *的黏性解* $(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon)$ *全局存在唯一且满足*

$$0 < c(\varepsilon, t) \leqslant \rho^\varepsilon(x, t) \leqslant C, \quad |m^\varepsilon(x, t)| \leqslant \rho^\varepsilon(x, t)(C + |\ln \rho^\varepsilon(x, t)|), \tag{8.5.6}$$

其中, 函数 $c(\varepsilon, t) > 0$ *可能会因* $\varepsilon \to 0$ *或* $t \to \infty$ *而趋于零, 常数* $C > 0$ *只依赖于* M.

证明　用 $\nabla w(\rho, m)$ 和 $\nabla z(\rho, m)$ 分别乘方程组 (8.5.3) 得

$$\begin{aligned} w_t + \lambda_2 w_x &= \varepsilon w_{xx} - \varepsilon w u_x^2 \leqslant \varepsilon w_{xx}, \\ z_t + \lambda_1 z_x &= \varepsilon z_{xx} - \varepsilon z u_x^2 \leqslant \varepsilon z_{xx}, \end{aligned}$$

因而由极值原理和 (8.5.5), 容易验证

$$D_1 = \{(\rho, m) : w(\rho, m) \leqslant N,\ z(\rho, m) \leqslant N\}$$

是方程组 (8.5.3) 的不变域, 它与图 8.1 中的 Σ_3 有着相似的形状, 其中 N 为适当大的常数. 这蕴涵着 $w(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon) \leqslant N$, $z(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon) \leqslant N$. 因此由定理 1.0.1 即得黏性解的先验估计 (8.5.6) 及其存在性. 证毕. □

现在构造系统 (8.5.1) 的熵–熵流. 根据式 (8.2.2) , 系统 (8.5.1) 的熵–熵流 (η, q) 满足

$$q_\rho = u\eta_\rho + \frac{1}{\rho}\eta_u, \quad q_u = \rho\eta_\rho + u\eta_u. \tag{8.5.7}$$

从 (8.5.7) 消去 q 即可得到熵方程

$$\eta_{\rho\rho} = \frac{1}{\rho^2}\eta_{uu}. \tag{8.5.8}$$

若 $\eta = h(\rho)e^{ku}$ 为方程 (8.5.8) 的解, 其中 k 为常数, 则

$$h''(\rho) - \frac{k^2}{\rho^2}h(\rho) = 0. \tag{8.5.9}$$

显然 $h(\rho) = \rho^l$ 是方程 (8.5.9) 的解, 其中 l 满足 $l(l-1) = k^2$.

我们在复空间中考虑参数 k. 令 $k = \dfrac{\xi}{1-\xi^2}$ $(\xi \in \mathbb{C})$, 则 $l = \dfrac{1}{1-\xi^2}$, 从而得到系统 (8.5.1) 的熵–熵流:

$$\eta = \rho^{\frac{1}{1-\xi^2}} e^{\frac{\xi}{1-\xi^2}u} = w^{\frac{1}{2(1-\xi)}} z^{\frac{1}{2(1+\xi)}}, \quad q = (u + \xi)\eta, \tag{8.5.10}$$

显然这些熵作为 ξ 的函数在 $\mathbb{C}\backslash\{-1,1\}$ 上解析. 式 (8.5.10) 中包含两类由新的复变量 ξ 确定的熵. 根据定义, η 是弱熵当且仅当

$$\operatorname{Re}\frac{1}{2(1-\xi)}>0,\quad \operatorname{Re}\frac{1}{2(1+\xi)}>0,$$

即 $\xi\in\Lambda=\{\xi\in\mathbb{C}:-1<\operatorname{Re}\xi<1\}$.

事实上, 可以从式 (8.5.10) 得到更多信息. 若在实空间中考虑 ξ, 则由式 (8.5.10) 定义的熵形成等温流的弱熵之基本集, 即

引理 8.5.2 *对任何 $\varphi(\xi)\in C_c^\infty(-1,1)$,*

$$\eta=\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)w^{\frac{1}{2(1-\xi)}}z^{\frac{1}{2(1+\xi)}}\mathrm{d}\xi,$$
$$q=\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)(u+\xi)w^{\frac{1}{2(1-\xi)}}z^{\frac{1}{2(1+\xi)}}\mathrm{d}\xi$$

是系统 (8.5.1) 的弱熵–熵流.

在本节中, 下述所有的熵–熵流均由式 (8.5.10) 给出. 我们验证系统 (8.5.1) 的弱熵满足 H_{loc}^{-1} 紧性.

引理 8.5.3 *设 $(\rho^\varepsilon,m^\varepsilon)$ 柯西问题 (8.5.3)–(8.5.4) 的解, 则对任何 $\xi\in(-1,1)$ 有*

$$\eta(\rho^\varepsilon,m^\varepsilon)_t+q(\rho^\varepsilon,m^\varepsilon)_x \text{ 在 } H_{\mathrm{loc}}^{-1} \text{ 中紧}. \tag{8.5.11}$$

证明 设 $\xi\in(-1,1)$, 则直接的计算表明:

$$\eta_{\rho\rho}=\frac{\xi^2}{(1-\xi^2)^2}(1-2\xi u+u^2)\rho^{\frac{\xi^2}{1-\xi^2}-1}\mathrm{e}^{\frac{\xi}{1-\xi^2}u}>0,$$
$$\eta_{\rho m}=\frac{\xi^2}{(1-\xi^2)^2}(\xi-u)\rho^{\frac{\xi^2}{1-\xi^2}-1}\mathrm{e}^{\frac{\xi}{1-\xi^2}u},$$
$$\eta_{mm}=\frac{\xi^2}{(1-\xi^2)^2}\rho^{\frac{\xi^2}{1-\xi^2}-1}\mathrm{e}^{\frac{\xi}{1-\xi^2}u}>0,$$

因而

$$\eta_{\rho\rho}\eta_{mm}-\eta_{\rho m}^2=\frac{\xi^4}{(1-\xi^2)^3}\rho^{\frac{2\xi^2}{1-\xi^2}-2}\mathrm{e}^{\frac{2\xi}{1-\xi^2}u}>0.$$

这表明当 $\xi\in(-1,1)$ 时 η 严格凸, 从而 (8.5.11) 获证. 证毕. □

设 $\nu_{x,t}$ 是从属于黏性解序列的一族 Young 测度. 不失一般性, 我们固定 (x,t) 而只考虑一个测度 ν. 令

$$\eta_1=w^{\frac{1}{2(1-\xi_1)}}z^{\frac{1}{2(1+\xi_1)}},\quad q_1=(u+\xi_1)\eta_1,$$
$$\eta_2=w^{\frac{1}{2(1-\xi_2)}}z^{\frac{1}{2(1+\xi_2)}},\quad q_2=(u+\xi_2)\eta_2,$$

则根据引理 8.5.3 和定理 2.2.2 有

$$\langle \nu, q_1\eta_2 - q_2\eta_1\rangle = \langle \nu, q_1\rangle\langle \nu, \eta_2\rangle - \langle \nu, q_2\rangle\langle \nu, \eta_1\rangle \tag{8.5.12}$$

对任何 $\xi_1,\ \xi_2 \in (-1,1)$ 成立.

下面证明 ν 是点测度或集中于真空. 为此, 我们将通过解析开拓定理证明 (8.5.12) 对任何 $\xi_1,\ \xi_2 \in \mathbb{C}\backslash\{-1,1\}$ 成立. 换言之, 我们将对所有的弱熵与强熵建立卷积关系 (8.5.12), 尽管目前尚不知道强熵是否满足 $H^{-1}_{\rm loc}$ 紧性.

因为 $w,\ z$ 有界, 所以在 wOz 平面上讨论 (8.5.12) 比较方便. 设

$$Q = \{(w,z) : 0 \leqslant w_- \leqslant w \leqslant w_+,\ 0 \leqslant z_- \leqslant z \leqslant z_+\}$$

是包含 $\mathrm{supp}\,\nu$ 的最小特征矩形. 容易看出: 若 $w_+ = 0$ 或 $z_+ = 0$, 则 Q 包含于真空. 所以我们假设 $w_- < w_+,\ z_- < z_+$.

令 $\xi_1 = 1 - \dfrac{1}{2n}$, 则 $\eta_1 = \eta_n = w^n z^{\frac{n}{4n-1}}$. 由等式 (8.5.12), 对任何弱熵–熵流 (η, q) 有

$$\langle \nu, q_n\eta - q\eta_n\rangle = \langle \nu, q_n\rangle\langle \nu, \eta\rangle - \langle \nu, q\rangle\langle \nu, \eta_n\rangle. \tag{8.5.13}$$

定义概率测度 μ_z 如下:

$$\langle \mu_z, h\rangle = \lim_{n\to\infty} \frac{\langle \nu, h w^n z^{\frac{n}{4n-1}}\rangle}{\langle \nu, w^n z^{\frac{n}{4n-1}}\rangle}, \quad \forall h \in C_c(\mathbb{R}^2).$$

易证 μ_z 的支集包含于直线 $w = w_+$. 另一方面, 由等式 (8.5.13) 得

$$\frac{\langle \nu, q_n\eta - q\eta_n\rangle}{\langle \nu, \eta_n\rangle} = \frac{\langle \nu, q_n\rangle}{\langle \nu, \eta_n\rangle}\langle \nu, \eta\rangle - \langle \nu, q\rangle.$$

在上式中令 $n \to \infty$ 有

$$\langle \mu_z, q - \lambda_2\eta\rangle = \langle \nu, q - \lambda_2^+\eta\rangle, \tag{8.5.14}$$

其中, $\lambda_2^+ = \langle \mu_z, \lambda_2\rangle$ 是有限数, 尽管 $\lambda_2 - u + 1 = \dfrac{\ln w - \ln z}{2} + 1$ 可能趋于无穷. 事实上, 等式 (8.5.14) 的左端有限而 $\langle \nu, \eta\rangle > 0$, 故 λ_2^+ 有界. 同理, 令 $\xi_1 = -1 + \dfrac{1}{2n}$ 有

$$\langle \mu_w, q - \lambda_1\eta\rangle = \langle \nu, q - \lambda_1^+\eta\rangle, \tag{8.5.15}$$

其中, $\lambda_1^+ = \langle \mu_w, \lambda_1\rangle$, 概率测度 μ_w 定义如下:

$$\langle \mu_w, h\rangle = \lim_{n\to\infty} \frac{\langle \nu, h w^{\frac{n}{4n-1}} z^n\rangle}{\langle \nu, w^{\frac{n}{4n-1}} z^n\rangle}, \quad \forall h \in C_c(\mathbb{R}^2).$$

把等式 (8.5.14) 与 (8.5.15) 相结合, 有

引理 8.5.4 设 $\eta = w^{\frac{1}{2(1-\xi)}} z^{\frac{1}{2(1+\xi)}}$, $q = (u+\xi)\eta$, 则对任何 $\xi \in (-1,1)$ 有

$$(\lambda_2^+ - \lambda_1^+)\frac{\langle \nu, \eta\rangle}{\eta(w^+, z^+)} = (1+\xi)\left\langle \mu_w, \left(\frac{w}{w^+}\right)^{\frac{1}{2(1-\xi)}}\right\rangle + (1-\xi)\left\langle \mu_z, \left(\frac{z}{z^+}\right)^{\frac{1}{2(1+\xi)}}\right\rangle. \tag{8.5.16}$$

利用引理 8.5.4 即可证明 $\nu(\{\rho > 0\}) = 1$. 事实上, 根据 μ_w 和 μ_z 的定义, 容易验证 $\mu_w(\{w > 0\}) = \mu_z(\{z > 0\}) = 1$, 因而式 (8.5.16) 可改写为

$$(\lambda_2^+ - \lambda_1^+)\frac{\langle \nu, \eta\rangle}{\eta(w^+, z^+)} = \left\langle \mu_w, (1+\xi)\left[\left(\frac{w}{w^+}\right)^{\frac{1}{2(1-\xi)}} - 1\right]\right\rangle + \left\langle \mu_z, (1-\xi)\left[\left(\frac{z}{z^+}\right)^{\frac{1}{2(1+\xi)}} - 1\right]\right\rangle + 2.$$

令 $\operatorname{Im}\xi \to \infty$ 有

$$\begin{aligned}(\lambda_2^+ - \lambda_1^+)\nu(\{\rho > 0\}) &= -\frac{1}{2}\left\langle \mu_w, \ln\frac{w}{w^+}\right\rangle - \frac{1}{2}\left\langle \mu_z, \ln\frac{z}{z^+}\right\rangle + 2 \\ &= \lambda_2^+ - \lambda_1^+,\end{aligned}$$

这是由于 $\langle \mu_w, \ln w_+\rangle = \langle \mu_z, \ln w_+\rangle = \ln w_+$, $0 \leqslant \frac{w}{w^+}, \frac{z}{z^+} \leqslant 1$. 所以 $\nu(\{\rho > 0\}) = 1$.

因为函数 $\langle \nu, \eta\rangle$, $\langle \mu_w, w^{\frac{1}{2(1-\xi)}}\rangle$ 以及 $\langle \mu_z, z^{\frac{1}{2(1+\xi)}}\rangle$ 都在 Λ 内解析, 而式 (8.5.16) 对 $\xi \in (-1,1)$ 成立, 所以根据解析开拓定理, 式 (8.5.16) 对所有 $\xi \in \Lambda$ 成立. 现在证明式 (8.5.16) 对任意 $\xi \in \mathbb{C}\backslash\{-1,1\}$ 成立.

定义概率测度 $\bar{\mu}_z$ 如下:

$$\langle \bar{\mu}_z, h\rangle = \lim_{n\to\infty}\frac{\langle \nu, hw^n\rangle}{\langle \nu, w^n\rangle}, \quad \forall h \in C_c(\mathbb{R}^2),$$

则易证 $\operatorname{supp}\bar{\mu}_z \subset \{(w,z) : w = w^+\}$. 此外, 对任何 $h \in C_c(\mathbb{R}^2)$ 有

$$\begin{aligned}\langle \mu_z, h\rangle &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\langle \nu, hw^n z^{\frac{n}{4n-1}}\rangle}{\langle \nu, w^n\rangle} \cdot \lim_{n\to+\infty}\frac{\langle \nu, w^n\rangle}{\langle \nu, w^n z^{\frac{n}{4n-1}}\rangle} \\ &= \frac{\langle \bar{\mu}_z, hz^{\frac{1}{4}}\rangle}{\langle \bar{\mu}_z, z^{\frac{1}{4}}\rangle},\end{aligned} \tag{8.5.17}$$

这表明 $\langle \mu_z, z^{\frac{1}{2(1+\xi)}}\rangle$ 在区域

$$\Omega_z = \left\{\xi : \operatorname{Re}\frac{1}{2(1+\xi)} > -\frac{1}{4}\right\}$$

内解析. 同理可证, $\langle \mu_w, w^{\frac{1}{2(1-\xi)}}\rangle$ 在区域

$$\Omega_w = \left\{\xi : \mathrm{Re}\,\frac{1}{2(1-\xi)} > -\frac{1}{4}\right\}$$

内解析. 于是式 (8.5.16) 的右端在

$$\Omega_0 = \left\{\xi \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\frac{1}{2(1+\xi)} > -\frac{1}{4},\ \mathrm{Re}\,\frac{1}{2(1-\xi)} > -\frac{1}{4}\right\}$$

内解析. 接下来证明式 (8.5.16) 对任意

$$\xi \in \tilde{\Omega}_0 = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| > 3\} \subset \Omega_0$$

成立. 因为 $\eta = w^{\frac{1}{2(1-\xi)}} z^{\frac{1}{2(1+\xi)}}$ 可能在 $\tilde{\Omega}_0$ 内无界, 所以先需要说明 $\langle \nu, \eta \rangle$ 对任意 $\xi \in \tilde{\Omega}_0$ 有意义.

直接的计算表明

$$\begin{aligned}
f(\xi; w, z) &= \left(\frac{w}{w_+}\right)^{\frac{1}{2(1-\xi)}} \left(\frac{z}{z_+}\right)^{\frac{1}{2(1+\xi)}} + \left(\frac{w}{w_+}\right)^{\frac{1}{2(1+\xi)}} \left(\frac{z}{z_+}\right)^{\frac{1}{2(1-\xi)}} \\
&= \mathrm{e}^{\frac{\ln\frac{w}{w_+} + \ln\frac{z}{z_+}}{2(1-\xi^2)}} \left(\mathrm{e}^{\frac{(\ln\frac{w}{w_+} - \ln\frac{z}{z_+})\xi}{2(1-\xi^2)}} + \mathrm{e}^{\frac{-(\ln\frac{w}{w_+} - \ln\frac{z}{z_+})\xi}{2(1-\xi^2)}} \right) \\
&= 2\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(-\ln\frac{w}{w_+} - \ln\frac{z}{z_+}\right)^k}{2^k k!} \left(\frac{\frac{1}{\xi^2}}{1-\frac{1}{\xi^2}}\right)^k\right) \\
&\quad \times \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(\ln\frac{w}{w_+} - \ln\frac{z}{z_+}\right)^{2j}}{4^j (2j)!} \left(\frac{\frac{1}{\xi}}{1-\frac{1}{\xi^2}}\right)^{2j}\right) \\
&= 2\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{m} C_{m-1}^{k-1} \frac{\left(-\ln\frac{w}{w_+} - \ln\frac{z}{z_+}\right)^k}{2^k k!}\right) \frac{1}{\xi^{2m}}\right) \\
&\quad \times \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{l} C_{l+j-1}^{2j-1} \frac{\left(\ln\frac{w}{w_+} - \ln\frac{z}{z_+}\right)^{2j}}{4^j (2j)!}\right) \frac{1}{\xi^{2l}}\right) \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{c_{2p}(w, z)}{\xi^{2p}}.
\end{aligned} \tag{8.5.18}$$

注意到 $\ln\dfrac{w}{w_+} + \ln\dfrac{z}{z_+} \leqslant 0$, 有

$$c_{2p}(w, z) \geqslant 0, \quad \forall\, (w, z) \in \mathrm{supp}\,\nu.$$

因此由式 (8.5.16) 得

$$
\begin{aligned}
&(\lambda_2^+ - \lambda_1^+)\langle \nu, f(\xi; w, z)\rangle \\
=& \langle \mu_w, f(\xi; w, z)\rangle + \langle \mu_z, f(\xi; w, z)\rangle \\
&+ \left\langle \mu_w, \xi\left[\left(\frac{w}{w_+}\right)^{\frac{1}{2(1-\xi)}} - \left(\frac{w}{w_+}\right)^{\frac{1}{2(1+\xi)}}\right]\right\rangle \\
&+ \left\langle \mu_z, \xi\left[\left(\frac{z}{z_+}\right)^{\frac{1}{2(1-\xi)}} - \left(\frac{z}{z_+}\right)^{\frac{1}{2(1+\xi)}}\right]\right\rangle .
\end{aligned} \tag{8.5.19}
$$

与式 (8.5.18) 相似, 把式 (8.5.19) 中的最后两项展开成 Laurent 级数. 经过简单计算, 有

$$
\begin{aligned}
g(\xi; w) =& \xi\left[\left(\frac{w}{w_+}\right)^{\frac{1}{2(1-\xi)}} - \left(\frac{w}{w_+}\right)^{\frac{1}{2(1+\xi)}}\right] \\
=& \xi\left[\mathrm{e}^{\frac{\ln\frac{w}{w_+}}{2(1-\xi^2)}}\left(\mathrm{e}^{\frac{\xi\ln\frac{w}{w_+}}{2(1-\xi^2)}} - \mathrm{e}^{\frac{-\xi\ln\frac{w}{w_+}}{2(1-\xi^2)}}\right)\right] \\
=& \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{m} C_{m-1}^{k-1}\frac{\left(-\ln\dfrac{w}{w_+}\right)^k}{2^k k!}\right)\frac{1}{\xi^{2m}}\right) \\
&\times\left(\sum_{l=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{l} C_{l+j}^{2j}\frac{-\left(\ln\dfrac{w}{w_+}\right)^{2j+1}}{4^j(2j+1)!}\right)\frac{1}{\xi^{2l}}\right) \\
=& \sum_{p=0}^{\infty}\frac{h_{2p}\left(\dfrac{w}{w_+}\right)}{\xi^{2p}}.
\end{aligned} \tag{8.5.20}
$$

显然 $h_{2p}\left(\dfrac{w}{w_+}\right) \geqslant 0$. 由式 (8.5.17) 知 $\langle \mu_w, f(\xi; w, z)\rangle$, $\langle \mu_w, g(\xi; w)\rangle$, $\langle \mu_z, g(\xi; z)\rangle$ 以及 $\langle \mu_z, f(\xi; w, z)\rangle$ 在 Ω_0 内解析, 因而 $\langle \mu_w, c_{2p}(w, z)\rangle$, $\left\langle \mu_w, h_{2p}\left(\dfrac{w}{w_+}\right)\right\rangle$, $\left\langle \mu_z, h_{2p}\left(\dfrac{z}{z_+}\right)\right\rangle$ 以及 $\langle \mu_z, c_{2p}(w, z)\rangle$ 都有界.

选取 $\xi \in \mathbb{R}$, $|\xi| > 3$, 则由 Levi 引理得

$$
\langle \mu_w, f(\xi; w, z)\rangle = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{\langle \mu_w, c_{2p}(w, z)\rangle}{\xi^{2p}}, \tag{8.5.21}
$$

$$
\langle \mu_z, f(\xi; w, z)\rangle = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{\langle \mu_z, c_{2p}(w, z)\rangle}{\xi^{2p}}, \tag{8.5.22}
$$

$$\langle \mu_w, g(\xi; w)\rangle = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\left\langle \mu_w, h_{2p}\left(\dfrac{w}{w_+}\right)\right\rangle}{\xi^{2p}}, \tag{8.5.23}$$

$$\langle \mu_z, g(\xi; z)\rangle = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\left\langle \mu_z, h_{2p}\left(\dfrac{z}{z_+}\right)\right\rangle}{\xi^{2p}}, \tag{8.5.24}$$

这是由于 $c_{2p}(w,z)$, $h_{2p}\left(\dfrac{w}{w_+}\right)$, $h_{2p}\left(\dfrac{z}{z_+}\right) \geqslant 0$. 于是 $\sum\limits_{p=0}^{\infty} \dfrac{\langle \mu_w, c_{2p}(w,z)\rangle}{\xi^{2p}}$ 在 $\tilde{\Omega}_0$ 内绝对收敛, 因为 $\langle \mu_w, f(\xi; w, z)\rangle$ 在 $\tilde{\Omega}_0$ 内解析;

同理 $\sum\limits_{p=0}^{\infty} \dfrac{\langle \mu_z, c_{2p}(w,z)\rangle}{\xi^{2p}}$, $\sum\limits_{p=0}^{\infty} \dfrac{\left\langle \mu_w, h_{2p}\left(\dfrac{w}{w_+}\right)\right\rangle}{\xi^{2p}}$ 以及 $\sum\limits_{p=0}^{\infty} \dfrac{\left\langle \mu_z, h_{2p}\left(\dfrac{w}{w_+}\right)\right\rangle}{\xi^{2p}}$ 也在 $\tilde{\Omega}_0$ 内绝对收敛. 因此由式 (8.5.16) 及 (8.5.18)~(8.5.24), 有

$$\begin{aligned}(\lambda_2^+ - \lambda_1^+)\langle \nu, f(\xi; w, z)\rangle = &\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\left\langle \mu_w, c_{2p}(w,z) + h_{2p}\left(\dfrac{w}{w_+}\right)\right\rangle}{\xi^{2p}} \\ &+\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\left\langle \mu_z, c_{2p}(w,z) + h_{2p}\left(\dfrac{z}{z_+}\right)\right\rangle}{\xi^{2p}}\end{aligned} \tag{8.5.25}$$

在 Λ 内成立. 定义

$$\begin{aligned} g_p^{(n)}(w,z) &= (-1)^p n^{2p} \left(f(n\mathrm{i}; w, z) - \sum_{s=0}^{p-1} (-1)^s \frac{c_{2s}(w,z)}{n^{2s}} \right) \\ &= \sum_{s=p}^{\infty} (-1)^{p+s} \frac{c_{2s}(w,z)}{n^{2(s-p)}}, \quad p \in \mathbb{Z}^+. \end{aligned} \tag{8.5.26}$$

易见 $g_p^{(n)}(w,z) \geqslant 0$ 并且当 $n \to \infty$ 时收敛于 $c_{2p}(w,z)$. 由于 $c_0(w,z) = 2$, 所以 $\langle \nu, c_0(w,z)\rangle$ 有定义, 而且

$$\begin{aligned} &(\lambda_2^+ - \lambda_1^+)\langle \nu, c_0(w,z)\rangle \\ = &\left\langle \mu_w, c_0(w,z) + h_0\left(\frac{w}{w_+}\right)\right\rangle + \left\langle \mu_z, c_0(w,z) + h_0\left(\frac{z}{z_+}\right)\right\rangle. \end{aligned}$$

假设 $\langle \nu, c_{2s}(w,z)\rangle$ $(0 \leqslant s \leqslant p-1)$ 已有定义且对 $0 \leqslant s \leqslant p-1$ 有

$$\begin{aligned} &(\lambda_2^+ - \lambda_1^+)\langle \nu, c_{2s}(w,z)\rangle \\ = &\left\langle \mu_w, c_{2s}(w,z) + h_{2s}\left(\frac{w}{w_+}\right)\right\rangle + \left\langle \mu_z, c_{2s}(w,z) + h_{2s}\left(\frac{z}{z_+}\right)\right\rangle. \end{aligned} \tag{8.5.27}$$

下面证明 $\langle \nu, c_{2p}(w,z)\rangle$ 也有定义且式 (8.5.27) 对 $s=p$ 成立.

利用 (8.5.25), (8.5.26) 易证极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\langle \nu, g_p^{(n)}(w,z)\rangle$ 存在. 于是, 应用 Fatou 引理有

$$\langle \nu, c_{2p}(w,z)\rangle \leqslant \lim_{n\to\infty}\langle \nu, g_p^{(n)}(w,z)\rangle.$$

把这与 (8.5.27) 相结合即得

$$\begin{aligned}&(\lambda_2^+-\lambda_1^+)\langle \nu, c_{2p}(w,z)\rangle\\ \leqslant&\left\langle \mu_w, c_{2p}(w,z)+h_{2p}\left(\frac{w}{w_+}\right)\right\rangle+\left\langle \mu_z, c_{2p}(w,z)+h_{2p}\left(\frac{z}{z_+}\right)\right\rangle.\end{aligned}$$

据此, 用反证法易证 (8.5.27) 对 $s=p$ 成立. 若不然, 假设

$$\begin{aligned}&(\lambda_2^+-\lambda_1^+)\langle \nu, c_{2p}(w,z)\rangle\\ <&\left\langle \mu_w, c_{2p}(w,z)+h_{2p}\left(\frac{w}{w_+}\right)\right\rangle+\left\langle \mu_z, c_{2p}(w,z)+h_{2p}\left(\frac{z}{z_+}\right)\right\rangle.\end{aligned}$$

由于 $g_p^{(n)}(w,z)=c_{2p}(w,z)-\dfrac{1}{n^2}g_{p+1}^{(n)}(w,z)$, 所以

$$\begin{aligned}&(\lambda_2^+-\lambda_1^+)\left\langle \nu, \frac{1}{n^2}g_{p+1}^{(n)}(w,z)\right\rangle\\ =&(\lambda_2^+-\lambda_1^+)\langle \nu, c_{2p}(w,z)\rangle-\left\langle \mu_w, c_{2p}(w,z)+h_{2p}\left(\frac{w}{w_+}\right)\right\rangle\\ &-\left\langle \mu_z, c_{2p}(w,z)+h_{2p}\left(\frac{z}{z_+}\right)\right\rangle\\ &+\sum_{s=p+1}^{\infty}(-1)^{p+s+1}\frac{\left\langle \mu_w, c_{2s}(w,z)+h_{2s}\left(\frac{w}{w_+}\right)\right\rangle}{n^{2(s-p)}}\\ &+\sum_{s=p+1}^{\infty}(-1)^{p+s+1}\frac{\left\langle \mu_z, c_{2s}(w,z)+h_{2s}\left(\frac{z}{z_+}\right)\right\rangle}{n^{2(s-p)}}.\end{aligned}$$

这就蕴涵着

$$\lim_{n\to\infty}\left\langle \nu, \frac{1}{n^2}g_{p+1}^{(n)}(w,z)\right\rangle<0,$$

与 $g_{p+1}^{(n)}(w,z)\geqslant 0$ 矛盾. 至此, 我们用数学归纳法证明了 $\langle \nu, c_{2p}(w,z)\rangle$ 对所有 $p\in\mathbb{N}$ 有定义且满足等式 (8.5.27). 因此 Laurent 级数 $\sum\limits_{p=0}^{\infty}\dfrac{\langle \nu, c_{2p}(w,z)\rangle}{\xi^{2p}}$ 在 $\tilde{\Omega}_0$ 内收敛.

现在构造一列在 $\{(w,z): w>0, z>0\}$ 内收敛于 $f(\xi;w,z)$ 的 ν 可测函数

$$f_m(\xi;w,z)=\sum_{p=0}^{m}\frac{c_{2p}(w,z)}{\xi^{2p}}.$$

因为

$$\langle \nu,\ f_m(\xi;w,z)|\rangle \leqslant \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\langle \nu, c_{2p}(w,z)\rangle}{|\xi|^{2p}} < \infty \quad (\forall \xi \in \tilde{\Omega}_0),$$

所以由 Fatou 引理有 $f(\xi;w,z) \in \mathbf{L}(\mathrm{d}\nu)$ $(\forall \xi \in \tilde{\Omega}_0)$($\mathbf{L}(\mathrm{d}\nu)$ 表示 L 可积). 特别地,

$$w^{-\alpha} z^{\frac{\alpha}{4\alpha+1}} + z^{-\alpha} w^{\frac{\alpha}{4\alpha+1}} \in \mathbf{L}(\mathrm{d}\nu)$$

对任意 $0 < \alpha < \dfrac{1}{4}$ 成立. 因此, 再次应用解析开拓定理, 式 (8.5.16) 在区域 $\tilde{\Omega}_0$ 内成立.

任取常数 $\alpha \in \left(0, \dfrac{1}{4}\right)$, 定义概率测度 μ_{1z} 如下:

$$\langle \mu_{1z}, h\rangle = \lim_{n\to\infty} \frac{\langle \nu, h w^n z^{-\alpha}\rangle}{\langle \nu, w^n z^{-\alpha}\rangle}, \quad \forall h \in C_c(\mathbf{R}^2),$$

则有

$$\begin{aligned}\langle \mu_z, h\rangle &= \lim_{n\to\infty} \frac{\langle \nu, h w^n z^{\frac{n}{4n-1}}\rangle}{\langle \nu, w^n z^{-\alpha}\rangle} \lim_{n\to\infty} \frac{\langle \nu, w^n z^{-\alpha}\rangle}{\langle \nu, w^n z^{\frac{n}{4n-1}}\rangle} \\ &= \frac{\langle \mu_{1z}, h z^{\frac{1}{4}+\alpha}\rangle}{\langle \mu_{1z}, z^{\frac{1}{4}+\alpha}\rangle}.\end{aligned}$$

利用先前的讨论, 易得式 (8.5.16) 对任何

$$\begin{aligned}\xi \in \tilde{\Omega}_1 &= \left\{\xi \in \mathbf{C} : |\xi| > \frac{2}{1+4\alpha} + 1\right\} \\ &\subset \Omega_1 = \left\{\xi \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}\frac{1}{2(1+\xi)} > -\frac{1}{4} - \alpha,\ \mathrm{Re}\frac{1}{2(1-\xi)} > -\frac{1}{4} - \alpha\right\}\end{aligned}$$

成立. 重复上述过程即可得到式 (8.5.16) 对任何

$$\begin{aligned}\xi \in \tilde{\Omega}_k &= \left\{\xi \in \mathbf{C} : |\xi| > \frac{2}{1+4k\alpha} + 1\right\} \\ &\subset \Omega_k = \left\{\xi \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}\frac{1}{2(1+\xi)} > -\frac{1}{4} - k\alpha,\ \mathrm{Re}\frac{1}{2(1-\xi)} > -\frac{1}{4} - k\alpha\right\}\end{aligned}$$

成立, 其中 k 是任意非负整数. 因此有

引理 8.5.5　*卷积关系* (8.5.12) *对任何* $\xi_1, \xi_2 \in \mathbf{C}\backslash\{-1, 1\}$ *成立.*

利用引理 8.5.5 可推出本节的主要结果:

定理 8.5.1　*设初值满足*

$$0 \leqslant \rho_0(x) \leqslant M, \quad \rho_0(x)|u_0(x)| \leqslant \rho_0(x)(M + |\ln \rho_0(x)|),$$

则柯西问题 (8.5.1)-(8.5.2) 存在一个整体弱解 $(\rho, \rho u)$ 满足

$$0 \leqslant \rho(x,t) \leqslant C, \quad |\rho u(x,t)| \leqslant \rho(x,t)(C + |\ln \rho(x,t)|),$$

其中, 常数 $C > 0$ 只依赖于常数 M.

证明 在等式 (8.5.12) 中令 $\xi_1 = 1 - \dfrac{1}{2n}, \xi_2 = 1 + \dfrac{1}{2n}$ 得

$$\frac{\langle \nu, q(\xi_1)\eta(\xi_2) - q(\xi_2)\eta(\xi_1)\rangle}{\langle \nu, \eta(\xi_1)\rangle\langle \nu, \eta(\xi_2)\rangle} = \frac{\langle \nu, q(\xi_1)\rangle}{\langle \nu, \eta(\xi_1)\rangle} - \frac{\langle \nu, q(\xi_2)\rangle}{\langle \nu, \eta(\xi_2)\rangle},$$

从而令 $n \to \infty$ 有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\langle \nu, q(\xi_2)\rangle}{\langle \nu, \eta(\xi_2)\rangle} = \lambda_2^+. \tag{8.5.28}$$

另一方面, 在等式 (8.5.12) 中令 $\xi \in \Lambda$, $\xi_2 = 1 + \dfrac{1}{2n}$, 类似于式 (8.5.14) 的证明, 有

$$\langle \mu_{-z}, q - \lambda_2 \eta\rangle = \langle \nu, q - \lambda_2^+ \eta\rangle \tag{8.5.29}$$

这是由于 (8.5.28), 其中概率测度 μ_{-z} 由下式定义:

$$\langle \mu_{-z}, h\rangle = \lim_{n\to\infty} \frac{\langle \nu, hw^{-n} z^{\frac{n}{4n+1}}\rangle}{\langle \nu, w^{-n} z^{\frac{n}{4n+1}}\rangle}, \quad \forall h \in C_c(\mathbb{R}^2).$$

容易验证 μ_{-z} 的支集包含于直线 $w = w_-$.

由式 (8.5.14) 和 (8.5.29) 可推出

$$\langle \mu_z, q - \lambda_2 \eta\rangle = \langle \mu_{-z}, q - \lambda_2 \eta\rangle \tag{8.5.30}$$

对任何 $\xi \in \Lambda$ 成立. 令 $\eta = w^n z^{\frac{n}{4n-1}}$, $q - \left(u + 1 - \dfrac{1}{2n}\right)\eta$, 则由式 (8.5.30) 即得

$$w_+^n \langle \mu_z, z^{\frac{n}{4n-1}}\rangle = w_-^n \langle \mu_{-z}, z^{\frac{n}{4n-1}}\rangle,$$

因而令 $n \to \infty$ 就有 $w_- = w_+$. 同理可证 $z_- = z_+$. 所以 ν 是点测度或集中于真空. 根据补偿列紧理论, 存在黏性解的子列 $\{(\rho^\varepsilon, \rho^\varepsilon u^\varepsilon)\}$ 使得

$$(\rho^\varepsilon(x,t), \rho^\varepsilon(x,t)u^\varepsilon(x,t)) \xrightarrow{\text{a.e.}} (\rho(x,t), \rho(x,t)u(x,t)) \quad (\varepsilon \to 0),$$

其中, $(\rho(x,t), \rho(x,t)u(x,t))$ 是柯西问题 (8.5.1)-(8.5.2) 的弱解. □

8.6　一般的等熵气体动力学系统

下面构造一列正则双曲系统

$$\begin{cases} \rho_t + (-2\delta u + \rho u)_x = 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 - \delta u^2 + P_1(\rho, \delta))_x = 0 \end{cases} \tag{8.6.1}$$

来逼近等熵气体动力学系统

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + P(\rho))_x = 0, \end{cases} \tag{8.6.2}$$

其中, $\delta > 0$ 为正则扰动常数, 扰动压强

$$P_1(\rho, \delta) = \int_{2\delta}^{\rho} \frac{t - 2\delta}{t} P'(t) \mathrm{d}t,$$

函数 $P(\rho) \in C^2(0, \infty)$ 满足

$$P'(\rho) > 0, \quad 2P'(\rho) + \rho P''(\rho) > 0, \quad \forall \rho > 0.$$

经过简单计算, 系统 (8.6.1) 的两个特征值为

$$\lambda_1 = \frac{m}{\rho} - \frac{\rho - 2\delta}{\rho} \sqrt{P'(\rho)}, \quad \lambda_2 = \frac{m}{\rho} + \frac{\rho - 2\delta}{\rho} \sqrt{P'(\rho)},$$

其相应的右特征向量为

$$\boldsymbol{r}_1 = (1, u - \sqrt{P'(\rho)})^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{r}_2 = (1, u + \sqrt{P'(\rho)})^{\mathrm{T}}.$$

系统 (8.6.1) 的两个黎曼不变量是

$$w(\rho, m) = \frac{m}{\rho} + \int_{2\delta}^{\rho} \frac{\sqrt{P'(s)}}{s} \mathrm{d}s, \quad z(\rho, m) = \frac{m}{\rho} - \int_{2\delta}^{\rho} \frac{\sqrt{P'(s)}}{s} \mathrm{d}s, \tag{8.6.3}$$

其中, $m = \rho u$. 此外

$$\begin{aligned} \nabla \lambda_1 \cdot \boldsymbol{r}_1 &= -\frac{4\delta}{\rho^2} \sqrt{P'(\rho)} - \frac{\rho - 2\delta}{2\rho^2 \sqrt{P'(\rho)}} (2P'(\rho) + \rho P''(\rho)), \\ \nabla \lambda_2 \cdot \boldsymbol{r}_2 &= \frac{4\delta}{\rho^2} \sqrt{P'(\rho)} + \frac{\rho - 2\delta}{2\rho^2 \sqrt{P'(\rho)}} (2P'(\rho) + \rho P''(\rho)). \end{aligned}$$

因此对固定的 $\delta > 0$, 系统 (8.6.1) 在区域 $\rho > 2\delta$ 内严格双曲而在 $\rho = 2\delta$ 上非严格双曲; 并且两个特征场都在区域 $\rho \geqslant 2\delta$ 上真正非线性.

考虑相应的抛物型方程组

$$\begin{cases} \rho_t + \big((\rho - 2\delta)u\big)_x = \varepsilon \rho_{xx}, \\ (\rho u)_t + \big(\rho u^2 - \delta u^2 + P_1(\rho, \delta)\big)_x = \varepsilon(\rho u)_{xx} \end{cases} \tag{8.6.4}$$

带初值

$$(\rho(x,0), u(x,0)) = (\rho_0(x), u_0(x)) \quad (\rho_0(x) \geqslant 2\delta) \tag{8.6.5}$$

的柯西问题. 有

定理 8.6.1 *设初值 $(\rho_0(x), u_0(x))$ 有界可测且 $\rho_0(x) \geqslant 2\delta$. 如果函数 $P(\rho) \in C^2(0,\infty)$ 具有定理 8.1.1 中所描述的一切性质, 那么柯西问题 (8.6.4) (8.6.5) 的黏性解 $(\rho^{\delta,\varepsilon}(x,t), u^{\delta,\varepsilon}(x,t))$ 全局存在, 并且满足*

$$2\delta \leqslant \rho^{\delta,\varepsilon}(x,t) \leqslant M, \quad |u^{\delta,\varepsilon}(x,t)| \leqslant M, \tag{8.6.6}$$

其中, 常数 $M > 0$ 只与初值的 L^∞ 范数有关; 而且存在黏性解的子列 $\{\rho^{\delta,\varepsilon}(x,t), u^{\delta,\varepsilon}(x,t)\}$ 几乎处处收敛于柯西问题 (8.6.1)–(8.6.5) 的一个熵解 $(\rho^\delta(x,t), u^\delta(x,t))$.

证明 首先证明黏性解的全局存在性. 分别用 (w_ρ, w_m) 和 (z_ρ, z_m) 乘方程组 (8.6.4) 得

$$\begin{aligned} w_t + \lambda_2 w_x &= \varepsilon w_{xx} + \frac{2\varepsilon}{\rho}\rho_x w_x - \frac{\varepsilon}{2\rho^2\sqrt{P'(\rho)}}(2P' + \rho P'')\rho_x^2, \\ z_t + \lambda_1 z_x &= \varepsilon z_{xx} + \frac{2\varepsilon}{\rho}\rho_x z_x + \frac{\varepsilon}{2\rho^2\sqrt{P'(\rho)}}(2P' + \rho P'')\rho_x^2. \end{aligned}$$

由 $P(\rho)$ 的性质有

$$w_t + \lambda_2 w_x \leqslant \varepsilon w_{xx} + \frac{2\varepsilon}{\rho}\rho_x w_x, \quad z_t + \lambda_1 z_x \geqslant \varepsilon z_{xx} + \frac{2\varepsilon}{\rho}\rho_x z_x.$$

于是应用极值原理得 $w(\rho^{\delta,\varepsilon}, m^{\delta,\varepsilon}) \leqslant N$, $z(\rho^{\delta,\varepsilon}, m^{\delta,\varepsilon}) \geqslant -N$, 因而 $\rho^{\delta,\varepsilon}$, $u^{\delta,\varepsilon} = m^{\delta,\varepsilon}/\rho^{\delta,\varepsilon}$ 关于 δ, ε 一致有界. 然后由 (8.6.4) 中的第一个方程可得 $\rho^{\delta,\varepsilon} \geqslant 2\delta$. 所以

$$\Sigma_\delta = \{(\rho, m) : w(\rho, m) \leqslant N, \quad z(\rho, m) \geqslant -N, \quad \rho \geqslant 2\delta\}$$

是方程组 (8.6.4) 的不变域, 如图 8.3 所示. 据此可以得到先验估计 (8.6.6) 以及黏性解的全局存在性. 这里 M 与 δ, ε 无关.

接下来构造系统 (8.6.1) 的熵–熵流. 就光滑解而言, 系统 (8.6.1) 等价于

$$\begin{cases} \rho_t + (-2\delta u + \rho u)_x = 0, \\ u_t + \left(\dfrac{1}{2}u^2 + \displaystyle\int_{2\delta}^{\rho} \frac{(t - 2\delta)P'(t)}{t^2}\mathrm{d}t\right)_x = 0. \end{cases} \tag{8.6.7}$$

特别地, 系统 (8.6.1) 与 (8.6.7) 具有相同的熵-熵流. 因而系统 (8.6.1) 的任何熵-熵流 $(\eta(\rho,u),q(\rho,u))$ 满足

$$q_\rho = u\eta_\rho + \frac{(\rho-2\delta)P'(\rho)}{\rho^2}\eta_u, \quad q_u = (\rho-2\delta)\eta_\rho + u\eta_u. \tag{8.6.8}$$

从式 (8.6.8) 消去 q 即得熵方程

$$\eta_{\rho\rho} = \frac{P'(\rho)}{\rho^2}\eta_{uu}. \tag{8.6.9}$$

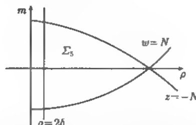


图 8.3　系统 (8.6.4) 的不变域

本节的一个新思想就是发现系统 (8.6.1) 具有下述特殊形式的熵-熵流:

$$\eta_k^1 = e^{kw}\left(a_1(\rho) + \frac{b_1(\rho,k)}{k}\right), \quad q_k^1 = \eta_k^1\left(\lambda_2 + \frac{c_1(\rho,k)}{k} + \frac{d_1(\rho,k)}{k^2}\right),$$

$$\eta_{-k}^1 = e^{-kz}\left(a_4(\rho) + \frac{b_4(\rho,k)}{k}\right), \quad q_{-k}^1 = \eta_{-k}^1\left(\lambda_1 + \frac{c_4(\rho,k)}{k} + \frac{d_4(\rho,k)}{k^2}\right),$$

$$\eta_k^2 = e^{kz}\left(a_3(\rho) + \frac{b_3(\rho,k)}{k}\right), \quad q_k^2 = \eta_k^2\left(\lambda_1 + \frac{c_3(\rho,k)}{k} + \frac{d_3(\rho,k)}{k^2}\right),$$

$$\eta_{-k}^2 = e^{-kw}\left(a_2(\rho) + \frac{b_2(\rho,k)}{k}\right), \quad q_{-k}^2 = \eta_{-k}^2\left(\lambda_2 + \frac{c_2(\rho,k)}{k} + \frac{d_2(\rho,k)}{k^2}\right),$$

其中, w, z 是由式 (8.6.3) 给出的系统 (8.6.1) 的黎曼不变量. 值得注意的是, 所有的待定函数 a_i, b_i $(i=1,2,3,4)$ 都只是单变量 ρ 的函数. 这种特殊的简单结构将在后面的分析中产生一个二阶导数项具有奇异系数 $1/k$ 的二阶常微分方程, 然后应用常微分方程的奇异扰动理论就可得到这些函数 $a_i(\rho)$, $b_i(\rho,k)$ 的界估计.

把熵 $\eta_k^1 = e^{kw}(a_1(\rho)+b_1(\rho,k)/k)$ 代入熵方程 (8.6.9) 有

$$k[2f(\rho)a_1' + f'(\rho)a_1] + a_1'' + 2f(\rho)b_1' + f'(\rho)b_1 + \frac{b_1''}{k} = 0,$$

其中, $f(\rho) = \sqrt{P'(\rho)}/\rho$. 令 $2f(\rho)a_1' + f'(\rho)a_1 = 0$ 以及

$$a_1'' + 2f(\rho)b_1' + f'(\rho)b_1 + \frac{b_1''}{k} = 0, \tag{8.6.10}$$

则 $a_1 = f^{-\frac{1}{2}}(\rho) > 0\ (\rho \geqslant 2\delta)$. 函数 $b_1(\rho, k)$ 的存在性及其关于 k 的一致界估计可由下述引理得到.

引理 8.6.1 (E. Kamke, [45]) 设 $Y(x) \in C^2[0,h]$ 是方程 $F(x,Y,Y') = 0$ 的解, 函数 $f(x,y,z,\lambda)$, $F(x,y,z)$ 在闭域

$$D = \{(x,y,z) : 0 \leqslant x \leqslant h, |y - Y(x)| \leqslant l(x), |z - Y'(x)| \leqslant m(x)\}$$

上连续, 其中 $l(x)$, $m(x)$ 是正值函数, $\lambda_0 > \lambda > 0$. 另外假设存在正常数 ε, K 与 L 使得

$$|f(x,y,z,\lambda) - F(x,y,z)| \leqslant \varepsilon,$$
$$|F(x,y_2,z) - F(x,y_1,z)| \leqslant K|y_2 - y_1|,$$
$$\frac{F(x,y,z_2) - F(x,y,z_1)}{z_2 - z_1} \geqslant L.$$

若函数 $y(x) = y(x,\lambda)$ 是二阶常微分方程

$$\lambda y'' + f(x,y,y',\lambda) = 0$$

带初值 $y(0) = Y(0)$ 及 $y'(0)$ 为任意常数的解, 则对充分小的参数 $\lambda > 0$, $\varepsilon > 0$ 与 $\Delta = |y'(0) - Y'(0)|$, $y(x)$ 在 $[0,h]$ 上存在且满足

$$|y(x,\lambda) - Y(x)| < \left(\frac{\varepsilon}{K} + \lambda_0\left(\frac{\Delta}{L} + \frac{N}{K}\right)\right)\mathrm{e}^{\frac{Kx}{L}}.$$

这里 $N = \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant h} |Y(x)|$.

进一步, 方程 (8.6.10) 对 ρ 求导, 然后再次应用引理 8.6.1 就可得到 b_1' 关于 k 的一致界.

由 (8.6.8) 中的第二个方程可推出相应于 η_k^1 的一个熵流 q_k^1 为

$$q_k^1 = \lambda_2\eta_k^1 + \mathrm{e}^{kw}\left(\frac{(\rho - 2\delta)a_1' - a_1}{k} + \frac{(\rho - 2\delta)b_1' - b_1}{k^2}\right),$$

其中

$$(\rho - 2\delta)a_1' - a_1 = -\frac{(\rho P'' + 2P')(\rho - 2\delta) + 8\delta P'}{4\rho P'\sqrt{f(\rho)}} < 0$$

和 $(\rho - 2\delta)b_1' - b_1$ 都在 $[2\delta, M]$ 上一致有界.

运用同样的方法可以得到另外三族 Lax 型熵-熵流:

$$\eta_{-k}^2 = \mathrm{e}^{-kw}\left(a_2(\rho) + \frac{b_2(\rho,k)}{k}\right),$$
$$q_{-k}^2 = \lambda_2\eta_{-k}^2 + \mathrm{e}^{-kw}\left(\frac{a_2 - (\rho - 2\delta)a_2'}{k} + \frac{b_2 - (\rho - 2\delta)b_2'}{k^2}\right),$$

其中, $a_2(\rho)=a_1(\rho)$ 和 $b_2(\rho,k)$ 满足

$$a_1''-2f(\rho)b_2'-f'(\rho)b_2+\frac{b_2''}{k}=0; \tag{8.6.11}$$

$$\eta_k^2=\mathrm{e}^{kz}\left(a_3(\rho)+\frac{b_3(\rho,k)}{k}\right),$$
$$q_k^2=\lambda_1\eta_k^2+\mathrm{e}^{kz}\left(\frac{(\rho-2\delta)a_3'-a_3}{k}+\frac{(\rho-2\delta)b_3'-b_3}{k^2}\right),$$

其中, $a_3(\rho)=a_1(\rho)$ 和 $b_3(\rho,k)$ 满足

$$a_1''-2f(\rho)b_3'-f'(\rho)b_3+\frac{b_3''}{k}=0; \tag{8.6.12}$$

$$\eta_{-k}^1=\mathrm{e}^{-kz}\left(a_4(\rho)+\frac{b_4(\rho,k)}{k}\right),$$
$$q_{-k}^1=\lambda_1\eta_{-k}^1+\mathrm{e}^{-kz}\left(\frac{a_4-(\rho-2\delta)a_4'}{k}+\frac{b_4-(\rho-2\delta)b_4'}{k^2}\right),$$

这里 $a_4(\rho)=a_1(\rho)$ 和 $b_4(\rho,k)$ 满足

$$a_1''+2f(\rho)b_4'+f'(\rho)b_4+\frac{b_4''}{k}=0. \tag{8.6.13}$$

于是利用引理 8.6.1 可由方程 (8.6.11)~(8.6.13) 依次得到 b_2, b_3, b_4 与 b_2', b_3', b_4' 的一致界估计.

容易验证系统 (8.6.1) 有个严格凸熵

$$\eta^*=\frac{\rho u^2}{2}+\int_{2\delta}^{\rho}\frac{(\rho-t)P'(t)}{t}\mathrm{d}t$$

及相应的熵流

$$q^*=\frac{\rho u^3}{2}-\frac{\delta u^3}{3}+u(\rho-2\delta)\int_{2\delta}^{\rho}\frac{P'(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

用 (η_ρ^*,η_m^*) 乘方程组 (8.6.4) 即可得到

$$\varepsilon(\rho_x,m_x)\cdot\nabla^2\eta^*(\rho,m)\cdot(\rho_x,m_x)^{\mathrm{T}}$$

的 L_{loc}^1 有界性, 从而

$$\varepsilon\frac{P'(\rho)}{\rho}\rho_x^2+\varepsilon\frac{1}{\rho}\left(\frac{m}{\rho}\rho_x-m_x\right)^2-\varepsilon\frac{P'(\rho)}{\rho}\rho_x^2+\varepsilon\rho u_x^2 \text{ 在 } L_{\mathrm{loc}}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+) \text{ 中有界}. \tag{8.6.14}$$

因为 $\rho\geqslant 2\delta$, 所以对任何固定的 $\delta>0$ 有 $\varepsilon\rho_x^2$ 与 εu_x^2 在 $L_{\mathrm{loc}}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中有界. 因此由标准的讨论可知上述四族 Lax 型熵-熵流均满足 H_{loc}^{-1} 紧性.

然后应用测度方程

$$
\begin{aligned}
&\langle \nu^{\delta}_{(x,t)}, \eta_1(\delta)q_2(\delta) - \eta_2(\delta)q_1(\delta)\rangle \\
=&\langle \nu^{\delta}_{(x,t)}, \eta_1(\delta)\rangle\langle \nu^{\delta}_{(x,t)}, q_2(\delta)\rangle - \langle \nu^{\delta}_{(x,t)}, \eta_2(\delta)\rangle\langle \nu^{\delta}_{(x,t)}, q_1(\delta)\rangle
\end{aligned}
$$

及文献 [33] 中建立的紧性框架即可把 $\nu^{\delta}_{(x,t)}$ 归结为点测度, 其中, $\nu^{\delta}_{(x,t)}$ 是从属于黏性解 $(\rho^{\delta,\varepsilon}, u^{\delta,\varepsilon})$ 的一族 Young 测度. 根据补偿列紧理论, 定理 8.6.1 获得证明. □

下面借助于扰动参数 δ 对下述关于 $H^{-1}_{\rm loc}$ 紧性的定理给出一个简洁的证明.

定理 8.6.2 *假设定理 8.6.1 中关于 $P(\rho)$ 的条件全部成立, 并且*

$$
\lim_{\rho\to 0}\frac{(P'(\rho))^{\frac{3}{2}}}{\rho P''(\rho)} = C \geqslant 0.
$$

如果系统 (8.6.2) 的弱熵–熵流 $(\eta(\rho,u), q(\rho,u))$ 满足 $\eta(\rho,u) = \rho H(\rho,u)$ 且 $H_u(\rho,u)$, $H_{uu}(\rho,u)$, $H_{uuu}(\rho,u)$ 在 $0 \leqslant \rho \leqslant M$, $|u| \leqslant M$ 上连续, 其中 M 是 (8.6.6) 中给出的正常数, 那么当 $\varepsilon = o\left(\dfrac{P'(2\delta)}{2\delta}\right)$ $(\delta \to 0)$ 且 $\delta \to 0$ 时,

$$
\eta(\rho^{\delta,\varepsilon}(x,t), u^{\delta,\varepsilon}(x,t))_t + q(\rho^{\delta,\varepsilon}(x,t), u^{\delta,\varepsilon}(x,t))_x
$$

在 $H^{-1}_{\rm loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中紧.

证明 把 (8.6.4) 改写为与之等价的方程组

$$
\begin{cases}
\rho_t + ((\rho - 2\delta)u)_x = \varepsilon\rho_{xx}, \\
u_t + \left(\dfrac{1}{2}u^2 + \displaystyle\int_{2\delta}^{\rho}\frac{(t-2\delta)P'(t)}{t^2}{\rm d}t\right)_x = \varepsilon u_{xx} + \dfrac{2\varepsilon}{\rho}\rho_x u_x.
\end{cases}
\tag{8.6.15}
$$

设 $(\eta(\rho,u), q_1(\rho,u,\delta))$, $(\eta(\rho,u), q(\rho,u))$ 分别为系统 (8.6.1) 和 (8.6.2) 的熵–熵流, 这是因为它们的熵相同但熵流不同. 用 (η_ρ, η_u) 乘方程组 (8.6.15) 得

$$
\begin{aligned}
&\eta(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon)_t + q(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon)_x \\
=&\varepsilon\eta(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon)_{xx} \quad \left(q_1(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon, \delta) - q(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon)\right)_x + \frac{2\varepsilon}{\rho}\eta_u\rho^\varepsilon_x u^\varepsilon_x \\
&-\varepsilon\left[\eta_{\rho\rho}(\rho^\varepsilon_x)^2 + 2\eta_{\rho u}\rho^\varepsilon_x u^\varepsilon_x + \eta_{uu}(u^\varepsilon_x)^2\right].
\end{aligned}
\tag{8.6.16}
$$

这里已略去上标 δ.

由于 $\eta(\rho,u) = \rho H(\rho,u)$, 所以由熵方程 (8.6.9) 得

$$
\eta_\rho = \int_0^\rho \frac{P'(\tau)}{\tau^2}\eta_{uu}(\tau,u){\rm d}\tau + g(u) = \int_0^\rho \frac{P'(\tau)}{\tau}H_{uu}(\tau,u){\rm d}\tau + g(u),
$$

其中, $g(u)$ 是任一光滑函数. 上式两端关于 ρ 积分有

$$\eta=\int_0^\rho\int_0^t\frac{P'(\tau)}{\tau}H_{uu}(\tau,u)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t+g(u)\rho,$$

这是因为 $\eta(0,u)=0$. 所以

$$\eta_u=\int_0^\rho\int_0^t\frac{P'(\tau)}{\tau}H_{uuu}(\tau,u)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t+g'(u)\rho, \tag{8.6.17}$$

$$\eta_{\rho u}=\int_0^\rho\frac{P'(\tau)}{\tau}H_{uuu}(\tau,u)\mathrm{d}\tau+g'(u). \tag{8.6.18}$$

把等式 (8.6.17), (8.6.18) 代入 (8.6.16), 并利用熵方程得

$$\eta(\rho^\varepsilon,m^\varepsilon)_t+q(\rho^\varepsilon,m^\varepsilon)_x=I_1+I_2+I_3, \tag{8.6.19}$$

其中

$$\begin{aligned}
I_1&=\varepsilon\eta(\rho^\varepsilon,m^\varepsilon)_{xx}-(q_1(\rho^\varepsilon,m^\varepsilon,\delta)-q(\rho^\varepsilon,m^\varepsilon))_x,\\
I_2&=-\varepsilon\left(\frac{P'(\rho)}{\rho}H_{uu}(\rho,u)\rho_x^2+\rho H_{uu}u_x^2\right),\\
I_3&=-2\varepsilon\left(\int_0^\rho\frac{P'(\tau)}{\tau}H_{uuu}(\tau,u)\mathrm{d}\tau-\frac{1}{\rho}\int_0^\rho\int_0^t\frac{P'(\tau)}{\tau}H_{uuu}(\tau,u)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t\right)\rho_x u_x.
\end{aligned}$$

由于 $\varepsilon=o\left(\frac{P'(2\delta)}{2\delta}\right)$ 或当 $\delta,\ \varepsilon\to0$ 时 $\frac{\varepsilon\rho^\varepsilon}{P'(\rho^\varepsilon)}\to0$, 所以对任何试验函数 $\Phi\in C_c^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty\varepsilon\eta(\rho^\varepsilon,m^\varepsilon)_{xx}\Phi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|\\
\leqslant&\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty\varepsilon|(\eta_\rho\rho_x^\varepsilon+H_u\rho^\varepsilon u_x^\varepsilon)\Phi_x|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
\leqslant&M\left[\left(\iint_S\varepsilon\frac{P'(\rho^\varepsilon)}{\rho^\varepsilon}(\rho_x^\varepsilon)^2\frac{\varepsilon\rho^\varepsilon}{P'(\rho^\varepsilon)}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{\frac12}+\left(\iint_S\varepsilon^2(\rho^\varepsilon)^2(u_x^\varepsilon)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{\frac12}\right]\\
&\times\left(\iint_S(\Phi_x)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{\frac12}\to0\quad(\delta\to0),
\end{aligned}$$

其中, $S=\operatorname{supp}\Phi$. 注意到

$$q_1(\rho^\varepsilon,m^\varepsilon,\delta)-q(\rho^\varepsilon,m^\varepsilon)\to0\quad(\delta\to0),$$

有 $\left(q_1(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon, \delta) - q(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon)\right)_x$ 在 $H^{-1}_{\text{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中紧. 于是 I_1 在 $H_{\text{loc}}^{-1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中紧. 由结论 (8.6.14), I_2 在 $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中有界. 此外, 有下述估计:

$$\left|\int_0^\rho \frac{P'(\tau)}{\tau} H_{uuu}(\tau, u)\mathrm{d}\tau\right| \leqslant M_1\int_0^\rho \frac{P'(\tau)}{\tau}\mathrm{d}\tau \leqslant M_2\sqrt{P'(\rho)},$$
$$\left|\int_0^\rho\int_0^t \frac{P'(\tau)}{\tau} H_{uuu}(\tau, u)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t\right| \leqslant M_1\int_0^\rho\int_0^t \frac{P'(\tau)}{\tau}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t \leqslant M_2\rho\sqrt{P'(\rho)}.$$

由于

$$\varepsilon\sqrt{P'(\rho)}\rho_x u_x \leqslant \frac{1}{2}\left(\varepsilon\frac{P'(\rho)}{\rho}\rho_x^2 + \varepsilon\rho u_x^2\right),$$

所以 I_3 也在 $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中有界. 因而 I_2+I_3 对某个指数 $\alpha\in(1,2)$ 在 $W^{-1,\alpha}_{\text{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中紧. 因此式 (8.6.19) 的右端在 $W^{-1,\alpha}_{\text{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中紧而左端在 $W^{-1,\infty}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中有界, 所以由 Murat 引理即可完成本定理的证明. □

评 注

对柯西问题 (8.0.1)–(8.0.2) 的研究已有很久的历史. 对于多方气体, 第一个解的存在性定理由 Nishida 得到. 他在文献 [46] 中证明了 $\gamma=1$ 的情形存在有界变差的弱解, 如果初值有界变差且远离真空. 之后, Nishida 和 Smoller[47] 把这一结果推广到 $\gamma\in(1,1+\delta)$ 的情形, 其中 δ 很小. 文献 [46, 47] 中所用方法称为 Glimm 格式法 (见文献 [48]).

利用 Tartar[9] 和 Murat[11] 发展起来的补偿列紧理论并借助于黏性消失法, DiPerna[49] 得到了 $\gamma = 1+\dfrac{2}{2n+1}$ $(n\geqslant 2)$ 的情形下弱解的全局存在性. Ding, Chen 和 Luo[10] 以及 Chen[50] 证明了绝热指数 $\gamma\in\left(1,\dfrac{5}{3}\right]$ 时 Lax-Friedrichs 格式的收敛性及整体弱解的存在性. Lions, Perthame 和 Tadmor[51] 利用补偿列紧方法和动力学公式相结合的思想证明了 $\gamma\geqslant 3$ 时弱解的全局存在性. 最后, Lions, Perthame 和 Souganidis[44] 成功地推广了这一方法而填补了 $\gamma\in\left(\dfrac{5}{3},3\right)$ 这一方面的空白, 并对整个 $\gamma>1$ 的情形提供了一个新的证明. Huang 和 Wang[52] 利用解析开拓定理和补偿列紧方法得到了等温气体动力学系统的整体弱解. 这样, 关于多方气体动力学系统广义解的存在性问题已得到完全解决.

对于一般压强 $P(\rho)$ 及 -类包含真空的光滑初值, Lu[53] 得到了柯西问题 (8.0.1) (8.0.2) 的整体光滑解. Chen 和 LeFloch[54] 证明了具有特殊压强 $P(\rho)$ 的系统 (8.0.1) 带任意 L^∞ 初值的 L^∞ 熵解的全局存在性.

在本章中, 定理 8.3.1 中 $\gamma>3$ 的情形的证明选自文献 [51]. 对于 $\gamma\in(1,3]$ 的情形, 为了避免太多烦琐的数学公式的应用, 我们没有用文献 [10, 44, 49, 50] 中给

出的证明, 而是采用了文献 [55] 中给出的另外一种相对简洁的证明, 尽管它需要对黏性解加些额外假设.

定理 8.4.1 的证明摘自文献 [56]. 关于系统 (8.0.1) 带非齐次项的情形的相关结果请参看文献 [57, 58]. 定理 8.5.1 的证明选自文献 [52]. 关于一般等熵气体动力学系统的两个结果即定理 8.6.1 与定理 8.6.2 选自文献 [59].

第 9 章　特殊的欧拉方程组

本章讨论下述非线性双曲系统:

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ u_t + \left(\frac{1}{2}u^2 + \int_0^\rho \frac{P'(s)}{s}\mathrm{d}s\right)_x = 0 \end{cases} \tag{9.0.1}$$

带有界可测初值

$$(\rho(x,0), u(x,0)) = (\rho_0(x), u_0(x)) \quad (\rho_0(x) \geqslant 0) \tag{9.0.2}$$

的柯西问题整体弱解的存在性.

就光滑解而言, 系统 (9.0.1) 与等熵气体动力学系统 (8.0.1) 等价; 但对有激波的解, 这两个系统并不相同.

系统 (9.0.1) 最先由 S. Earnshaw 在 1858 年推导等熵流的数学模型得到 (见文献 [60, 61]), 也称为一维可压缩流体流的欧拉方程组 (见文献 [62]). 系统 (9.0.1) 具有不同的物理背景, 它是在 $\mathbb{R}$ 上质量连续分布的远程互动的牛顿动力学系统之尺度极限系统 (见文献 [63, 64]), 也是 Vlasov 方程的流体动力学极限 (见文献 [65]).

应用第 6、第 7 章介绍的方法, 先研究两个特殊情形:

$$P(\rho) = \int_0^\rho s^2 \mathrm{e}^s \mathrm{d}s \text{ 或 } P(\rho) = \int_0^\rho s^2 (s+d)^{\gamma-3} \mathrm{d}s \quad (d > 0,\ \gamma > 3).$$

当 $P(\rho) = \int_0^\rho s^2 \mathrm{e}^s \mathrm{d}s$ 时, 定义映射 $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 如下:

$$F: (\rho, u) \to \left(\rho u, \frac{1}{2}u^2 + \int_0^\rho s\mathrm{e}^s \mathrm{d}s\right).$$

于是 $\mathrm{d}F$ 的两个特征值为

$$\lambda_1 = u - \rho \mathrm{e}^{\frac{\rho}{2}}, \quad \lambda_2 = u + \rho \mathrm{e}^{\frac{\rho}{2}}, \tag{9.0.3}$$

其相应的右特征向量为

$$r_1 = (1, -\mathrm{e}^{\frac{\rho}{2}})^{\mathrm{T}}, \quad r_2 = (1, \mathrm{e}^{\frac{\rho}{2}})^{\mathrm{T}},$$

从而当 $\rho \geqslant 0$ 时,

$$\nabla\lambda_1 \cdot \boldsymbol{r}_1 = -2\mathrm{e}^{\frac{\rho}{2}} - \frac{\rho}{2}\mathrm{e}^{\frac{\rho}{2}} < 0, \quad \nabla\lambda_2 \cdot \boldsymbol{r}_2 = 2\mathrm{e}^{\frac{\rho}{2}} + \frac{\rho}{2}\mathrm{e}^{\frac{\rho}{2}} > 0. \tag{9.0.4}$$

此时系统 (9.0.1) 的两个黎曼不变量为

$$w = u + 2\mathrm{e}^{\frac{\rho}{2}}, \quad z = u - 2\mathrm{e}^{\frac{\rho}{2}}. \tag{9.0.5}$$

于是

$$\lambda_1 = \frac{w+z}{2} - \frac{w-z}{2}\ln\left(\frac{w-z}{4}\right), \quad \lambda_2 = \frac{w+z}{2} + \frac{w-z}{2}\ln\left(\frac{w-z}{4}\right),$$

所以

$$\lambda_{1w} = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{w-z}{4}\right), \quad \lambda_{2z} = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{w-z}{4}\right).$$

如同 (6.2.4), 任何 2×2 双曲守恒律的熵满足方程

$$\eta_{wz} + \frac{\lambda_{2z}}{\lambda_2 - \lambda_1}\eta_w - \frac{\lambda_{1w}}{\lambda_2 - \lambda_1}\eta_z = 0,$$

因而对于 $P(\rho) = \int_0^\rho s^2\mathrm{e}^s\mathrm{d}s$ 的情形, 系统 (9.0.1) 的熵方程简化为

$$\eta_{wz} - \frac{1}{2(w-z)}\eta_w + \frac{1}{2(w-z)}\eta_z = 0.$$

由于多方气体动力学系统 (8.0.1) 的熵满足方程

$$\eta_{wz} + \frac{\lambda}{w-z}\eta_w - \frac{\lambda}{w-z}\eta_z = 0,$$

其中, $\lambda = \dfrac{3-\gamma}{2(\gamma-1)}$. 所以从某种意义上讲, 这一情形相当于多方气体 $\gamma = \infty$ 的情形.

当 $P(\rho) = \int_0^\rho s^2(s+d)^{\gamma-3}\mathrm{d}s$ $(\gamma > 3)$ 时, 定义映射 $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 如下:

$$F : (\rho, u) \to \left(\rho u, \frac{1}{2}u^2 + \int_0^\rho s(s+d)^{\gamma-3}\mathrm{d}s\right).$$

于是 $\mathrm{d}F$ 的两个特征值为

$$\lambda_1 = u - \rho(\rho+d)^{\frac{\gamma-3}{2}}, \quad \lambda_2 = u + \rho(\rho+d)^{\frac{\gamma-3}{2}}, \tag{9.0.6}$$

其相应的右特征向量为

$$\boldsymbol{r}_1 = \left(1, -(\rho+d)^{\frac{\gamma-3}{2}}\right)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{r}_2 = \left(1, (\rho+d)^{\frac{\gamma-3}{2}}\right)^{\mathrm{T}};$$

其相应的两个黎曼不变量为

$$w = u + \frac{\gamma-1}{2}(\rho+d)^{\frac{\gamma-1}{2}}, \quad z = u - \frac{\gamma-1}{2}(\rho+d)^{\frac{\gamma-1}{2}}. \tag{9.0.7}$$

经过简单计算, 当 $\rho \geqslant 0$ 时,

$$\nabla\lambda_1 \cdot r_1 = -2(\rho+d)^{\frac{\gamma-3}{2}} - \frac{\gamma-3}{2}\rho(\rho+d)^{\frac{\gamma-5}{2}} < 0, \tag{9.0.8}$$

$$\nabla\lambda_2 \cdot r_2 = 2(\rho+d)^{\frac{\gamma-3}{2}} + \frac{\gamma-3}{2}\rho(\rho+d)^{\frac{\gamma-5}{2}} > 0. \tag{9.0.9}$$

因此, 对于这两种特殊情形, 由式 (9.0.3) 与 (9.0.6) 知系统 (9.0.1) 在直线 $\rho = 0$ 上非严格双曲; 由式 (9.0.4) 与 (9.0.8), (9.0.9) 知两个特征场在 $\rho \geqslant 0$ 上真正非线性.

考虑相应的抛物型方程组

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = \varepsilon\rho_{xx}, \\ u_t + \left(\dfrac{1}{2}u^2 + \displaystyle\int_0^\rho \frac{P'(s)}{s}\mathrm{d}s\right)_x = \varepsilon u_{xx} \end{cases} \tag{9.0.10}$$

带光滑初值

$$(\rho(x,0), u(x,0)) = (\rho_0(x), u_0(x)) * j^\varepsilon \tag{9.0.11}$$

的柯西问题, 有

定理 9.0.1 *设初值 $(\rho_0(x), u_0(x))$ 有界可测且 $\rho_0(x) \geqslant 0$. 如果 $P(\rho) = \int_0^\rho s^2 e^s \mathrm{d}s$ 或 $P(\rho) = \int_0^\rho s^2(s+d)^{\gamma-3}\mathrm{d}s$ $(d > 0,\ \gamma > 3)$, 那么对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 柯西问题 (9.0.10)–(9.0.11) 的黏性解 $(\rho^\varepsilon(x,t), u^\varepsilon(x,t))$ 全局存在且满足*

$$0 \leqslant \rho^\varepsilon(x,t) \leqslant M, \quad |u^\varepsilon(x,t)| \leqslant M, \tag{9.0.12}$$

其中, M 为与 ε 无关的常数; 而且存在黏性解的子列 $\{(\rho^\varepsilon(x,t), u^\varepsilon(x,t))\}$ 几乎处处收敛于柯西问题 (9.0.1) (9.0.2) 的一个弱解 $(\rho(x,t), u(x,t))$.

定理 9.0.1 是本章的主要结果之一, 其证明将在第一部分至第二部分给出. 之后, 我们将利用补偿列紧方法和动力学公式相结合的思想研究另外一个特殊的欧拉方程组, 即系统 (9.0.1) 中 $P(\rho) = \dfrac{(\gamma-1)^2}{4\gamma}\rho^\gamma$ 的情形.

9.1 两个特殊欧拉方程组的黏性解

本节证明柯西问题 (9.0.10) (9.0.11) 的黏性解的存在性. 根据定理 1.0.1, 只需证得 L^∞ 估计 (9.0.12).

当 $P(\rho)=\int_0^\rho s^2\mathrm{e}^s\mathrm{d}s$ 时, 分别用 (w_ρ,w_u) 和 (z_ρ,z_u) 乘方程组 (9.0.10) 有

$$\begin{aligned}w_t+\lambda_2 w_x&=\varepsilon w_{xx}-\frac{\varepsilon}{2}\mathrm{e}^{\frac{\rho}{2}}\rho_x^2\leqslant\varepsilon w_{xx},\\ z_t+\lambda_1 z_x&=\varepsilon z_{xx}+\frac{\varepsilon}{2}\mathrm{e}^{\frac{\rho}{2}}\rho_x^2\geqslant\varepsilon z_{xx},\end{aligned}$$

其中, λ_1, λ_2, w, z 分别由 (9.0.3) 与 (9.0.5) 给出. 因此应用极值原理, $w(\rho^\varepsilon,u^\varepsilon)\leqslant N$ 和 $z(\rho^\varepsilon,u^\varepsilon)\geqslant -N$, 其中 N 为适当大的正常数, 它只依赖于初值的 L^∞ 范数. 此外, 由 $\rho_0(x)\geqslant 0$ 易得 $\rho^\varepsilon\geqslant 0$, 所以

$$\Sigma_6=\{(\rho,u):w(\rho,u)\leqslant N,\ z(\rho,u)\geqslant -N,\ \rho\geqslant 0\}$$

是一个不变域, 如图 9.1 所示. 据此就得到黏性解 $(\rho^\varepsilon(x,t),u^\varepsilon(x,t))$ 的有界性.

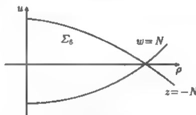


图 9.1　系统 (9.0.10) 的不变域

当 $P(\rho)=\int_0^\rho s^2(s+d)^{\gamma-3}\mathrm{d}s$ $(\gamma>3)$ 时, 与上述情形完全相似, 分别用 (w_ρ,w_u) 和 (z_ρ,z_u) 乘方程组 (9.0.10) 得

$$\begin{aligned}w_t+\lambda_2 w_x&=\varepsilon w_{xx}-\frac{\varepsilon(\gamma-3)}{2}(\rho+d)^{\frac{\gamma-5}{2}}\rho_x^2\leqslant\varepsilon w_{xx},\\ z_t+\lambda_1 z_x&=\varepsilon z_{xx}+\frac{\varepsilon(\gamma-3)}{2}(\rho+d)^{\frac{\gamma-5}{2}}\rho_x^2\geqslant\varepsilon z_{xx},\end{aligned}$$

其中, λ_1, λ_2, w, z 由 (9.0.6), (9.0.7) 给出. 因此应用极值原理,

$$D_2=\{(\rho,u):w(\rho,u)\leqslant L,\ z(\rho,u)\geqslant -L,\ \rho\geqslant 0\}$$

是一个不变域, 它有着与 Σ_6 相似的图形, 从而得到黏性解的先验估计 (9.0.12). 这就完成了定理 9.0.1 中第一部分的证明. □

9.2　两个特殊欧拉方程组的 Lax 熵与弱解

本节将证明黏性解的收敛性. 先来构造系统 (9.0.1) 的四族 Lax 型熵–熵流.

系统 (9.0.1) 的熵-熵流 (η, q) 为满足方程组

$$(q_\rho, q_u) = \left(u\eta_\rho + \frac{P'(\rho)}{\rho}\eta_u, \rho\eta_\rho + u\eta_u\right) \tag{9.2.1}$$

的函数. 若 $P(\rho) = \int_0^\rho s^2 e^s ds$, 则 (9.2.1) 简化为

$$(q_\rho, q_u) = (u\eta_\rho + \rho e^\rho \eta_u, \rho\eta_\rho + u\eta_u). \tag{9.2.2}$$

从 (9.2.2) 消去 q 即得熵方程

$$\eta_{\rho\rho} = e^\rho \eta_{uu}. \tag{9.2.3}$$

若函数 $\eta = h(s)e^{ku}$ $(k \in \mathbb{Z}^+)$ 为 (9.2.3) 的解, 则

$$h''(\rho) = k^2 e^\rho h(\rho). \tag{9.2.4}$$

令 $a(\rho) = e^{-\frac{\rho}{4}}$, $r = 2ke^{\frac{\rho}{2}}$ 以及 $h(\rho) = a(\rho)\phi(r)$, 则 $\phi(r)$ 满足标准的 Fuchsian 方程:

$$\phi''(r) - \left(1 - \frac{1}{4r^2}\right)\phi(r) = 0. \tag{9.2.5}$$

我们可用 Frobenius 方法得到 (9.2.5) 的一个级数形式的解:

$$\phi_1(r) = r^{\frac{1}{2}}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}r^{2n}\right) = r^{\frac{1}{2}}g(r).$$

于是

$$\phi_2(r) = \phi_1(r)\int_r^\infty \frac{1}{\phi_1^2(r)}dr = r^{\frac{1}{2}}g(r)\int_r^\infty \frac{1}{rg^2(r)}dr$$

是方程 (9.2.5) 的一个与 $\phi_1(r)$ 线性无关的解.

由 (9.2.2) 得 $q_u = \rho\eta_\rho + u\eta_u$, 因而系统 (9.0.1) 的两个前进波为

$$\begin{cases} \eta_k = h(\rho)e^{ku}, \\ q_k = u\eta_k + (\rho h'(\rho) - h(\rho))e^{ku}/k \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} \eta_{-k} = h(\rho)e^{-ku}, \\ q_{-k} = u\eta_{-k} + (h(\rho) - \rho h'(\rho))e^{-ku}/k. \end{cases}$$

由于 $h(\rho) - a(\rho)\phi(r)$, $a(\rho) = e^{-\frac{\rho}{4}}$ 以及 $r = 2ke^{\frac{\rho}{2}}$, 所以

$$q_k = \left(u + \rho e^{\frac{\rho}{2}}\frac{\phi'(r)}{\phi(r)} - \frac{4+\rho}{4k}\right)\eta_k,$$

$$q_{-k} = \left(u - \rho e^{\frac{\rho}{2}}\frac{\phi'(r)}{\phi(r)} + \frac{4+\rho}{4k}\right)\eta_{-k}.$$

令 $\eta_k^1 = a(\rho)\phi_1(r)e^{ku}$, 则由引理 6.2.1, 有

$$\eta_k^1 = a(\rho)\phi_1(r)e^{-r}e^{kw} = e^{kw}\left(a(\rho) + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \tag{9.2.6}$$

及其相应的熵流

$$\begin{aligned} q_k^1 =& \eta_k^1\left(\lambda_2 + \rho e^{\frac{\rho}{2}}\left(\frac{\phi_1'(r)}{\phi_1(r)} - 1\right) - \frac{4+\rho}{4k}\right) \\ =& \eta_k^1\left(\lambda_2 - \frac{4+\rho}{4k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right). \end{aligned} \tag{9.2.7}$$

类似地, 令 $\eta_{-k}^1 = a(\rho)\phi_1(r)e^{-ku}$ 有

$$\eta_{-k}^1 = a(\rho)\phi_1(r)e^{-r}e^{-kz} = e^{-kz}\left(a(\rho) + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \tag{9.2.8}$$

及其相应的熵流

$$\begin{aligned} q_{-k}^1 =& \eta_{-k}^1\left(\lambda_1 - \rho e^{\frac{\rho}{2}}\left(\frac{\phi_1'(r)}{\phi_1(r)} - 1\right) + \frac{4+\rho}{4k}\right) \\ =& \eta_{-k}^1\left(\lambda_1 + \frac{4+\rho}{4k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right). \end{aligned} \tag{9.2.9}$$

同理, 熵–熵流 (η_k^2, q_k^2), (η_{-k}^2, q_{-k}^2) 分别满足:

$$\eta_k^2 = a(\rho)\phi_2(r)e^{ku} = e^{kz}\left(a(\rho) + O\left(\frac{1}{k}\right)\right), \tag{9.2.10}$$

$$q_k^2 = \eta_k^2\left(\lambda_1 - \frac{4+\rho}{4k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right); \tag{9.2.11}$$

$$\eta_{-k}^2 = a(\rho)\phi_2(r)e^{-ku} = e^{-kw}\left(a(\rho) + O\left(\frac{1}{k}\right)\right), \tag{9.2.12}$$

$$q_{-k}^2 = \eta_{-k}^2\left(\lambda_2 + \frac{4+\rho}{4k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right). \tag{9.2.13}$$

此外, 从 (9.2.6)~(9.2.13) 可得

$$\begin{cases} q_k^1 = \lambda_2\eta_k^1 - e^{kw}\left(\frac{4+\rho}{4k}e^{-\frac{\rho}{4}} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right), \\ q_{-k}^1 = \lambda_1\eta_{-k}^1 + e^{-kz}\left(\frac{4+\rho}{4k}e^{-\frac{\rho}{4}} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right), \\ q_k^2 = \lambda_1\eta_k^2 - e^{kz}\left(\frac{4+\rho}{4k}e^{-\frac{\rho}{4}} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right), \\ q_{-k}^2 = \lambda_2\eta_{-k}^2 + e^{-kw}\left(\frac{4+\rho}{4k}e^{-\frac{\rho}{4}} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right). \end{cases} \tag{9.2.14}$$

引理 9.2.1 由式 (9.2.6)~(9.2.13) 给出的任何熵–熵流 $(\eta(\rho,u),q(\rho,u))$ 满足

$$\eta(\rho^\varepsilon,u^\varepsilon)_t+q(\rho^\varepsilon,u^\varepsilon)_x \text{ 在 } H^{-1}_{\rm loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+) \text{ 中紧},$$

其中, $(\rho^\varepsilon,u^\varepsilon)$ 是 $P(\rho)=\int_0^\rho s^2 e^s ds$ 时柯西问题 (9.0.10) (9.0.11) 的黏性解.

证明 容易验证, 当 $P(\rho)=\int_0^\rho s^2 e^s ds$ 时, 系统 (9.0.1) 有个严格凸熵–熵流

$$\eta^*=\frac{1}{2}u^2+e^\rho,\quad q^*=\frac{1}{3}u^3+\rho u e^\rho.$$

利用这个严格凸熵–熵流及证得 (5.1.4) 的相同技巧可推出

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}}\rho^\varepsilon_x,\ \varepsilon^{\frac{1}{2}}u^\varepsilon_x \text{ 在 } L^2_{\rm loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+) \text{ 中有界}. \tag{9.2.15}$$

注意到上面构造的所有 Lax 型熵–熵流均在 $\rho\geqslant 0$ 上光滑, 所以由结论 (9.2.15) 及标准的讨论即可完成本定理的证明. □

若 $P(\rho)=\int_0^\rho s^2(s+d)^{\gamma-3}ds$, 则方程组 (9.2.1) 简化为

$$(q_\rho,q_u)=(u\eta_\rho+\rho(\rho+d)^{\gamma-3}\eta_u,\rho\eta_\rho+u\eta_u). \tag{9.2.16}$$

从 (9.2.16) 消去 q 即得熵方程

$$\eta_{\rho\rho}=(\rho+d)^{\gamma-3}\eta_{uu}. \tag{9.2.17}$$

若函数 $\eta=h(s)e^{ku}$ $(k\in\mathbb{Z}^+)$ 为 (9.2.17) 的解, 则

$$h''(\rho)=k^2(\rho+d)^{\gamma-3}h(\rho). \tag{9.2.18}$$

令 $a(\rho)=(\rho+d)^{\frac{3-\gamma}{4}}$, $s=\frac{2k}{\gamma-1}(\rho+d)^{\frac{\gamma-1}{2}}$, 则 $h=a(\rho)\phi(s)$ 满足 (9.2.18) 当且仅当 $\phi(s)$ 满足标准的 Fuchsian 方程:

$$\phi''(s)-\left(1+\frac{\mu}{s^2}\right)\phi(s)=0, \tag{9.2.19}$$

其中, $\mu=\frac{4-(\gamma-1)^2}{4(\gamma-1)^2}>-\frac{1}{4}$.

由 (9.2.16) 有 $q_u=\rho\eta_\rho+u\eta_u$. 若

$$\eta_k=h(\rho)e^{ku}, \tag{9.2.20}$$

则 $(q_k)_u = \rho h'(\rho)\mathrm{e}^{ku} + kuh(\rho)\mathrm{e}^{ku}$, 因而相应于 η_k 的一个熵流为

$$\begin{aligned} q_k =& uh(\rho)\mathrm{e}^{ku} + (\rho h' - h)\mathrm{e}^{ku}/k \\ & - \eta_k\left(u + \rho(\rho+d)^{\frac{\gamma-3}{2}}\frac{\phi'(s)}{\phi(s)} - \frac{(\gamma+1)\rho+4d}{4k(\rho+d)}\right). \end{aligned} \tag{9.2.21}$$

若

$$\eta_{-k} = h(\rho)\mathrm{e}^{-ku}, \tag{9.2.22}$$

则 $(q_{-k})_u = \rho h'(\rho)\mathrm{e}^{-ku} - kuh(\rho)\mathrm{e}^{-ku}$, 因而相应于 η_{-k} 的一个熵流为

$$\begin{aligned} q_{-k} =& uh(\rho)\mathrm{e}^{-ku} + (h - \rho h')\mathrm{e}^{-ku}/k \\ =& \eta_{-k}\left(u - \rho(\rho+d)^{\frac{\gamma-3}{2}}\frac{\phi'(s)}{\phi(s)} + \frac{(\gamma+1)\rho+4d}{4k(\rho+d)}\right). \end{aligned} \tag{9.2.23}$$

于是 $P(\rho) = \int_0^\rho s^2(s+d)^{\gamma-3}\mathrm{d}s$ 时系统 (9.0.1) 的两个前进波由 (9.2.20), (9.2.21) 和 (9.2.22), (9.2.23) 所提供.

我们可再次应用 Frobenius 方法得到方程 (9.2.19) 的一个级数形式的解:

$$\phi_1(s) = s^j\sum_{n=0}^{\infty} e_{2n}s^{2n} = s^j g(s),$$

其中, $j > 0$ 是方程 $j(j-1) = \mu$ 的任意一个根, 系数 e_0 为任意正常数, 且 e_{2n} 满足

$$e_{2n} = \frac{e_{2(n-1)}}{(2n+j)(2n+j-1)-\mu}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

于是

$$\phi_2(s) = \phi_1(s)\int_s^\infty \frac{1}{\phi_1^2(s)}\mathrm{d}s = s^j g(s)\int_s^\infty (s^j g(s))^{-2}\mathrm{d}s.$$

是方程 (9.2.19) 的一个与 $\phi_1(s)$ 线性无关的解. 易见 $\phi_1(s) > 0$, $\phi_1'(s) > 0$, $\phi_2(s) > 0$ 以及 $\phi_2'(s) < 0$.

令 $\eta_k^1 = a(\rho)\phi_1(s)\mathrm{e}^{ku}$, 则由引理 6.2.1 有

$$\eta_k^1 = a(\rho)\phi_1(s)\mathrm{e}^{-s}\mathrm{e}^{kw} = \mathrm{e}^{kw}\left(a(\rho) + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \tag{9.2.24}$$

及其相应的熵流

$$\begin{aligned} q_k^1 =& \eta_k^1\left(\lambda_2 + \rho(\rho+d)^{\frac{\gamma-3}{2}}\left(\frac{\phi_1'(s)}{\phi_1(s)} - 1\right) - \frac{(\gamma+1)\rho+4d}{4k(\rho+d)}\right) \\ =& \eta_k^1\left(\lambda_2 - \frac{(\gamma+1)\rho+4d}{4k(\rho+d)} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right). \end{aligned} \tag{9.2.25}$$

类似地, 令 $\eta^1_{-k}=a(\rho)\phi_1(s)e^{-ku}$ 有

$$\eta^1_{-k}=a(\rho)\phi_1(s)e^{-s}e^{-kz}=e^{-kz}\left(a(\rho)+O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \tag{9.2.26}$$

及其相应的熵流

$$\begin{aligned} q^1_{-k}=&\eta^1_{-k}\left(\lambda_1-\rho(\rho+d)^{\frac{\gamma-3}{2}}\left(\frac{\phi_1'(s)}{\phi_1(s)}-1\right)+\frac{(\gamma+1)\rho+4d}{4k(\rho+d)}\right)\\ =&\eta^1_{-k}\left(\lambda_1+\frac{(\gamma+1)\rho+4d}{4k(\rho+d)}-O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right). \end{aligned} \tag{9.2.27}$$

此外, 熵-熵流 (η^2_k,q^2_k), (η^2_{-k},q^2_{-k}) 分别满足:

$$\eta^2_k=a(\rho)\phi_2(s)e^{ku}=a(\rho)\phi_2(s)e^{s}e^{kz}=e^{kz}\left(a(\rho)+O\left(\frac{1}{k}\right)\right), \tag{9.2.28}$$

$$q^2_k=\eta^2_k\left(\lambda_1-\frac{(\gamma+1)\rho+4d}{4k(\rho+d)}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right); \tag{9.2.29}$$

$$\eta^2_{-k}=a(\rho)\phi_2(s)e^{-ku}=e^{-kw}\left(a(\rho)+O\left(\frac{1}{k}\right)\right), \tag{9.2.30}$$

$$q^2_{-k}=\eta^2_{-k}\left(\lambda_2+\frac{(\gamma+1)\rho+4d}{4k(\rho+d)}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right). \tag{9.2.31}$$

引理 9.2.2 *由 (9.2.24)~(9.2.31) 给出的任何熵-熵流 $(\eta(\rho,u),q(\rho,u))$ 满足*

$$\eta(\rho^\varepsilon,u^\varepsilon)_t+q(\rho^\varepsilon,u^\varepsilon)_x \text{ 在 } H^{-1}_{\rm loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+) \text{ 中紧},$$

其中, $(\rho^\varepsilon,u^\varepsilon)$ 是 $P(\rho)=\int_0^\rho s^2(s+d)^{\gamma-3}ds$ 时柯西问题 (9.0.10)-(9.0.11) 的黏性解.

证明 容易验证, 当 $P(\rho)=\int_0^\rho s^2(s+d)^{\gamma-3}ds$ 时, 系统 (9.0.1) 有个严格凸熵

$$\eta^*=\frac{1}{(\gamma-2)(\gamma-1)}(\rho+d)^{\gamma-1}+\frac{1}{2}u^2.$$

所以应用证明引理 9.2.1 的相同方法即可获得本定理的证明. □

利用引理 9.2.1 与引理 9.2.2 以及第 6 章归约 Young 测度的方法, 即可把 Young 测度归结为点测度. 根据补偿列紧理论, 定理 9.0.1 获得证明. □

9.3 $P(\rho)=\dfrac{(\gamma-1)^2}{4\gamma}\rho^\gamma$ 的欧拉方程组

下面研究非线性双曲守恒律

$$\begin{cases} \rho_t+(\rho u)_x=0,\\ u_t+\left(\dfrac{u^2}{2}+\dfrac{\gamma-1}{4}\rho^{\gamma-1}\right)_x=0 \end{cases} \tag{9.3.1}$$

带有界可测初值

$$(\rho(x,0),u(x,0)) = (\rho_0(x),u_0(x)) \quad (\rho_0(x)\geqslant 0) \tag{9.3.2}$$

的柯西问题整体弱解的存在性, 其中 $\gamma > 3$. 系统 (9.3.1) 是欧拉方程组 (9.0.1) 中 $P(\rho)=\dfrac{\theta^2}{\gamma}\rho^\gamma$, $\theta=\dfrac{\gamma-1}{2}$ 的情形.

定义映射 $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 如下:

$$F:(\rho,u)\to\left(\rho u,\frac{1}{2}u^2+\frac{\gamma-1}{4}\rho^{\gamma-1}\right).$$

于是 $\mathrm{d}F$ 的两个特征值为

$$\lambda_1=u-\theta\rho^\theta,\quad \lambda_2=u+\theta\rho^\theta, \tag{9.3.3}$$

其相应的右特征向量为

$$\boldsymbol{r}_1=(1,-\theta\rho^{\theta-1})^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{r}_2=(1,\theta\rho^{\theta-1})^{\mathrm{T}},$$

其相应的两个黎曼不变量为

$$w(\rho,u)=u+\rho^\theta,\quad z(\rho,u)=u-\rho^\theta.$$

经过简单计算, 有

$$\nabla\lambda_1\cdot\boldsymbol{r}_1=-\theta(\theta+1)\rho^{\theta-1},\quad \nabla\lambda_2\cdot\boldsymbol{r}_2=\theta(\theta+1)\rho^{\theta-1}. \tag{9.3.4}$$

因此, 由式 (9.3.3) 知系统 (9.3.1) 在直线 $\rho=0$ 上非严格双曲; 由式 (9.3.4) 知两个特征场都在 $\rho=0$ 上线性退化, 因为 $\gamma>3$.

首先考虑下述扰动系统:

$$\begin{cases} \rho_t+((\rho-\delta)u)_x=0,\\ u_t+\left(\dfrac{1}{2}u^2+\displaystyle\int_\delta^\rho\theta^2(t-\delta)t^{\gamma-3}\mathrm{d}t\right)_x=0, \end{cases} \tag{9.3.5}$$

其中, $\delta>0$ 是扰动参数.

经过简单计算, 系统 (9.3.5) 的两个特征值为

$$\lambda_1=u-\theta\rho^{\theta-1}(\rho-\delta),\quad \lambda_2=u+\theta\rho^{\theta-1}(\rho-\delta), \tag{9.3.6}$$

其相应的两个黎曼不变量与系统 (9.3.1) 相同:

$$w=u+\rho^\theta,\quad z=u-\rho^\theta.$$

系统 (9.3.5) 的熵–熵流 $(\eta(\rho,u),q(\rho,u))$ 满足方程组:

$$q_\rho=u\eta_\rho+\theta^2(\rho-\delta)\rho^{\gamma-3}\eta_u,\quad q_u=(\rho-\delta)\eta_\rho+u\eta_u. \tag{9.3.7}$$

从 (9.3.7) 消去 q 有

$$\eta_{\rho\rho}=\theta^2\rho^{\gamma-3}\eta_{uu}. \tag{9.3.8}$$

因此, 系统 (9.3.5) 与 (9.3.1) 有着相同的熵.

现在考虑与系统 (9.3.5) 相关的抛物型方程组

$$\begin{cases} \rho_t+((\rho-\delta)u)_x=\varepsilon\rho_{xx},\\ u_t+\left(\dfrac{1}{2}u^2+\displaystyle\int_\delta^\rho\theta^2(t-\delta)t^{\gamma-3}\mathrm{d}t\right)_x=\varepsilon u_{xx} \end{cases} \tag{9.3.9}$$

带光滑初值

$$(\rho(x,0),u(x,0))=(\rho_0^{\varepsilon,\delta}(x),u_0^{\varepsilon,\delta}(x))=(\rho_0(x)+\delta,u_0(x))*j^\varepsilon \tag{9.3.10}$$

的柯西问题, 有

引理 9.3.1 *设初值 $(\rho_0(x),u_0(x))$ 有界可测且满足 $\rho_0(x)\geqslant 0$, 则对任意给定的 ε, $\delta>0$, 柯西问题 (9.3.9)–(9.3.10) 的黏性解 $(\rho^{\varepsilon,\delta}(x,t),u^{\varepsilon,\delta}(x,t))$ 全局存在且满足*

$$\delta\leqslant\rho^{\varepsilon,\delta}(x,t)\leqslant M,\quad |u^{\varepsilon,\delta}(x,t)|\leqslant M, \tag{9.3.11}$$

其中, $M>0$ 为与 ε, δ 无关的常数.

证明 分别用 (w_ρ,w_u) 和 (z_ρ,z_u) 乘方程组 (9.3.9) 得

$$\begin{aligned} w_t+\lambda_2w_x&=\varepsilon w_{xx}-\theta(\theta-1)\rho^{\theta-2}\rho_x^2\leqslant\varepsilon w_{xx},\\ z_t+\lambda_1z_x&=\varepsilon z_{xx}+\theta(\theta-1)\rho^{\theta-2}\rho_x^2\geqslant\varepsilon z_{xx}, \end{aligned}$$

其中, λ_1, λ_2 由式 (9.3.6) 给出. 于是应用极值原理即得 $w(\rho^{\varepsilon,\delta},u^{\varepsilon,\delta})\leqslant N, z(\rho^{\varepsilon,\delta},u^{\varepsilon,\delta})\geqslant -N$. 利用 (9.3.9) 中的第一个方程和定理 1.0.1 中的最后一个结论, 有 $\rho^{\varepsilon,\delta}\geqslant\delta$, 所以

$$\Sigma_7=\{(\rho,u):w(\rho,u)\leqslant N,\ z(\rho,u)\geqslant -N,\ \rho\geqslant\delta\}$$

是方程组 (9.3.9) 的一个不变域, 如图 9.2 所示. 据此就得到黏性解的先验估计 (9.3.11) 及其存在性. □

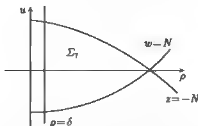


图 9.2　$\gamma > 3$ 时系统 (9.3.9) 的不变域

根据动力学公式, 系统 (9.3.1) 的一族弱熵 η^0 为

$$\eta^0(\rho, u) = \int_{\mathbb{R}} g(\xi) G_0(\rho, \xi - u) \mathrm{d}\xi,$$

系统 (9.3.1) 相应于 η^0 的一族弱熵流 q^0 为

$$q^0(\rho, u) = \int_{\mathbb{R}} g(\xi) [\theta\xi + (1-\theta)u] G_0(\rho, \xi - u) \mathrm{d}\xi;$$

系统 (9.3.1) 的两族强熵 $\eta^\pm$ 为

$$\eta^\pm(\rho, u) = \int_{\mathbb{R}} g(\xi) G_\pm(\rho, \xi - u) \mathrm{d}\xi,$$

系统 (9.3.1) 相应于 $\eta^\pm$ 的两族强熵流 $q^\pm$ 为

$$q^\pm(\rho, u) = \int_{\mathbb{R}} g(\xi) [\theta\xi + (1-\theta)u] G_\pm(\rho, \xi - u) \mathrm{d}\xi,$$

其中, $g(\xi)$ 是任意具有紧支集的光滑函数, 基本解

$$\begin{cases} G_0(\rho, \xi - u) = [(w-\xi)(\xi - z)]_+^\lambda, \\ G_+(\rho, \xi - u) = (\xi - z)^\lambda (\xi - w)_+^\lambda, \\ G_-(\rho, \xi - u) = (w - \xi)^\lambda (z - \xi)_+^\lambda. \end{cases}$$

这里 $\lambda = \dfrac{3-\gamma}{2(\gamma-1)} > -\dfrac{1}{2}$.

引理 9.3.2　设系统 (9.3.1) 的熵 $\eta(\rho, u)$ 满足

$$\eta_\rho(0, u) = 0, \quad \frac{\partial^i \eta(\rho, u)}{\partial u^i} \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

在 $\{(\rho, u) : 0 \leqslant \rho \leqslant M, |u| \leqslant M\}$ 上有界, 则当 ε, $\delta \to 0$ 时,

$$\eta(\rho^{\varepsilon,\delta}(x,t), u^{\varepsilon,\delta}(x,t))_t + q(\rho^{\varepsilon,\delta}(x,t), u^{\varepsilon,\delta}(x,t))_x$$

在 $H^{-1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ 中紧, 其中 $(\rho^{\varepsilon,\delta}(x,t), u^{\varepsilon,\delta}(x,t))$ 是柯西问题 (9.2.9)–(9.2.10) 的粘性解, q 是系统 (9.3.1) 相应于 η 的熵流.

证明 利用熵方程可得到系统 (9.3.5) 的一个凸熵

$$\eta^*=\frac{1}{2}u^2+\frac{\gamma-1}{4(\gamma-2)}\rho^{\gamma-1}.$$

然后用 $\left(\eta_\rho^*(\rho^{\varepsilon,\delta},u^{\varepsilon,\delta}),\eta_u^*(\rho^{\varepsilon,\delta},u^{\varepsilon,\delta})\right)$ 乘方程组 (9.3.9) 即得

$$\varepsilon(\rho_x^{\varepsilon,\delta},u_x^{\varepsilon,\delta})\cdot\nabla^2\eta^*(\rho^{\varepsilon,\delta},u^{\varepsilon,\delta})\cdot(\rho_x^{\varepsilon,\delta},u_x^{\varepsilon,\delta})^{\mathrm{T}}$$

的 L^1_{loc} 有界性, 从而

$$\varepsilon\theta^2(\rho^{\varepsilon,\delta})^{\gamma-3}(\rho_x^{\varepsilon,\delta})^2+\varepsilon(u_x^{\varepsilon,\delta})^2\ 在\ L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)\ 中有界. \tag{9.3.12}$$

利用熵方程 (9.3.8) 及条件 $\eta_\rho(0,u)=0$, 有

$$\begin{aligned}\eta_\rho(\rho,u)&=\int_0^\rho\theta^2s^{\gamma-3}\eta_{uu}(s,u)\mathrm{d}s,\\ \eta_{\rho u}(\rho,u)&=\int_0^\rho\theta^2s^{\gamma-3}\eta_{uuu}(s,u)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

因而

$$|\eta_\rho(\rho,u)|\leqslant C_1\int_0^\rho s^{\gamma-3}\mathrm{d}s\leqslant C_1\rho^{\gamma-2}\leqslant C_2\rho^{\frac{\gamma-3}{2}},\quad |\eta_{\rho u}(\rho,u)|\leqslant C_2\rho^{\frac{\gamma-3}{2}},\tag{9.3.13}$$

其中, $C_1,\ C_2>0$ 是常数.

设 $\bar q(\rho,u,\delta)$ 是系统 (9.3.5) 相应于熵 $\eta(\rho,u)$ 的一个熵流. 用 $(\eta_\rho(\rho^{\varepsilon,\delta},u^{\varepsilon,\delta}),$ $\eta_u(\rho^{\varepsilon,\delta},u^{\varepsilon,\delta}))$ 乘方程组 (9.3.9) 得

$$\begin{aligned}&\eta(\rho^{\varepsilon,\delta},u^{\varepsilon,\delta})_t+q(\rho^{\varepsilon,\delta},u^{\varepsilon,\delta})_x\\ =&\varepsilon\eta(\rho^{\varepsilon,\delta},u^{\varepsilon,\delta})_{xx}-\left(\bar q(\rho^{\varepsilon,\delta},u^{\varepsilon,\delta},\delta)-q(\rho^{\varepsilon,\delta},u^{\varepsilon,\delta})\right)_x\\ &-\varepsilon\left[\eta(\rho^{\varepsilon,\delta},u^{\varepsilon,\delta})_{\rho\rho}(\rho_x^{\varepsilon,\delta})^2+2\eta(\rho^{\varepsilon,\delta},u^{\varepsilon,\delta})_{\rho u}\rho_x^{\varepsilon,\delta}u_x^{\varepsilon,\delta}\right.\\ &\left.+\eta(\rho^{\varepsilon,\delta},u^{\varepsilon,\delta})_{uu}(u_x^{\varepsilon,\delta})^2\right].\end{aligned}\tag{9.3.14}$$

因为 $\bar q(\rho^{\varepsilon,\delta},u^{\varepsilon,\delta},\delta)-q(\rho^{\varepsilon,\delta},u^{\varepsilon,\delta})\to0\ (\delta\to0)$, 所以 $\left(\bar q(\rho^{\varepsilon,\delta},u^{\varepsilon,\delta},\delta)-q(\rho^{\varepsilon,\delta},u^{\varepsilon,\delta})\right)_x$ 在 $H^{-1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中紧. 利用 (9.3.13) 中的第一个估计式和 (9.3.12) 以及 η_u 的有界性, 有

$$\varepsilon\eta(\rho^{\varepsilon,\delta},u^{\varepsilon,\delta})_{xx}\ 当\ \varepsilon,\ \delta\to0\ 时在\ H^{-1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)\ 中紧.$$

利用 (9.3.13) 中的第二个估计式和 (9.3.12), 并注意到 η_{uu} 有界以及 $\eta_{\rho\rho}=\theta^2\rho^{\gamma-3}\eta_{uu}$, 有

$$\varepsilon\left[\eta_{\rho\rho}(\rho^{\varepsilon,\delta},u^{\varepsilon,\delta})(\rho_x^{\varepsilon,\delta})^2+2\eta_{\rho u}(\rho^{\varepsilon,\delta},u^{\varepsilon,\delta})\rho_x^{\varepsilon,\delta}u_x^{\varepsilon,\delta}+\eta_{uu}(\rho^{\varepsilon,\delta},u^{\varepsilon,\delta})(u_x^{\varepsilon,\delta})^2\right]$$

在 $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中有界, 从而它对某个 $\alpha\in(1,2)$ 在 $W^{-1,\alpha}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中紧. 因此等式 (9.3.14) 的右端在 $W^{-1,\alpha}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中紧. 由于等式 (9.3.14) 的左端在 $W^{-1,\infty}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中有界, 所以根据定理 2.3.1 即可完成引理 9.3.2 的证明. □

引理 9.3.3　设 $\eta_1=\eta^+ + C\eta^0$, $\eta_2=\eta^- + C\eta_0$, $\eta_3=\eta^+ - \eta^-$, 其中

$$C=-\frac{2\lambda\theta\displaystyle\int_0^\infty (s+2)^{\lambda-1}s^\lambda \mathrm{d}s}{\displaystyle\int_{-1}^1 (1-s^2)^\lambda \mathrm{d}s}>0,$$

则当 ε, $\delta\to 0$ 时,

$$\eta_j(\rho^{\varepsilon,\delta}(x,t),u^{\varepsilon,\delta}(x,t))_t+q_j(\rho^{\varepsilon,\delta}(x,t),u^{\varepsilon,\delta}(x,t))_x\quad (j=1,2,3)$$

在 $H^{-1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中紧, 其中 $(\rho^{\varepsilon,\delta}(x,t),u^{\varepsilon,\delta}(x,t))$ 是柯西问题 (9.2.9)–(9.2.10) 的黏性解, q_j 是系统 (9.3.1) 相应于 η_j 的熵流.

证明　令 $\tau=\xi-w$, 则

$$\eta^+(\rho,u)=\int_w^\infty g(\xi)(\xi-z)^\lambda(\xi-w)^\lambda \mathrm{d}\xi=\int_0^\infty g(\tau+w)(\tau+2\rho^\theta)^\lambda\tau^\lambda \mathrm{d}\tau,$$

因而

$$\begin{aligned}\eta^+_\rho(\rho,u)=&\theta\rho^{\theta-1}\int_0^\infty g'(\tau+w)(\tau+2\rho^\theta)^\lambda\tau^\lambda \mathrm{d}\tau\\&+2\lambda\theta\rho^{\theta-1}\int_0^\infty g(\tau+w)(\tau+2\rho^\theta)^{\lambda-1}\tau^\lambda \mathrm{d}\tau\end{aligned}\tag{9.3.15}$$

因为 $-1<2\lambda<0$, 所以 (9.3.15) 右边的第一项当 $\rho\to 0$ 时趋于零. 在 (9.3.15) 右边的第二项中令 $\tau=\rho^\theta s$, 则有

$$\begin{aligned}\eta^+_\rho(\rho,u)=&\int_0^\infty g'(\tau+w)(\tau+2\rho^\theta)^\lambda\tau^\lambda \mathrm{d}\tau\theta\rho^{\theta-1}\\&+\int_0^\infty g(\rho^\theta s+w)(s+2)^{\lambda-1}s^\lambda \mathrm{d}s2\lambda\theta,\end{aligned}$$

这是由于 $(\rho^\theta)^{2\lambda+1}\rho^{-1}=1$, 所以

$$\eta^+_\rho(0,u)=2\lambda\theta g(u)\int_0^\infty (s+2)^{\lambda-1}s^\lambda \mathrm{d}s.\tag{9.3.16}$$

类似地, 有

$$\eta^0(\rho,u)=\rho\int_{-1}^1 g(u+\rho^\theta s)(1-s^2)^\lambda \mathrm{d}s,$$

因而

$$\eta^0_\rho(\rho,u)=\int_{-1}^{1}g(u+\rho^\theta s)(1-s^2)^\lambda \mathrm{d}s+\theta\rho^\theta\int_{1}^{1}g'(u+\rho^\theta s)(1-s^2)^\lambda \mathrm{d}s,$$

所以

$$\eta^0_\rho(0,u)=g(u)\int_{-1}^{1}(1-s^2)^\lambda \mathrm{d}s. \tag{9.3.17}$$

于是把 (9.3.16) (9.3.17) 相结合就有 $\eta_{1\rho}(0,u)=0$. 显然 η_1 关于变量 u 光滑, 所以应用引理 9.3.2 即得

$$\eta_1(\rho^{\varepsilon,\delta}(x,t),u^{\varepsilon,\delta}(x,t))_t+q_1(\rho^{\varepsilon,\delta}(x,t),u^{\varepsilon,\delta}(x,t))_x$$

在 $H^{-1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中紧. 同理可证 (η_j,q_j) $(j=2,3)$ 也满足 H^{-1}_{loc} 紧性. 证毕. □

下面给出本节的主要结果.

定理 9.3.1 *设初值 $(\rho_0(x),u_0(x))$ 有界可测且 $\rho_0(x)\geqslant 0$, 则柯西问题 (9.3.1)–(9.3.2) 存在整体有界的熵解.*

证明 根据引理 9.3.3 和定理 2.2.2, 系统 (9.3.1) 的熵–熵流 (η_i,q_i) 和 (η_j,q_j) $(1\leqslant i,\ j\leqslant 3)$ 满足测度方程:

$$\langle\nu,\eta_i\rangle\langle\nu,q_j\rangle-\langle\nu,\eta_j\rangle\langle\nu,q_i\rangle=\langle\nu,\eta_iq_j-\eta_jq_i\rangle,$$

所以

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}}g(\xi_1)\overline{G_i(\xi_1)}\mathrm{d}\xi_1\int_{\mathbb{R}}h(\xi_2)\overline{[\theta\xi_2+(1-\theta)u]G_j(\xi_2)}\mathrm{d}\xi_2\\&-\int_{\mathbb{R}}h(\xi_2)\overline{G_j(\xi_2)}\mathrm{d}\xi_2\int_{\mathbb{R}}g(\xi_1)\overline{[\theta\xi_1+(1-\theta)u]G_i(\xi_1)}\mathrm{d}\xi_1\\=&\int_{\mathbb{R}^2}g(\xi_1)h(\xi_2)\overline{G_i(\xi_1)[\theta\xi_2+(1-\theta)u]G_j(\xi_2)}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\\&-\int_{\mathbb{R}^2}g(\xi_1)h(\xi_2)\overline{G_i(\xi_1)[\theta\xi_1+(1-\theta)u]G_j(\xi_2)}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2,\end{aligned} \tag{9.3.18}$$

其中, G_i 是相应于熵 η_i 的基本解.

等式 (9.3.18) 对任何具有紧支集的光滑函数 g, h 成立, 这蕴涵着

$$\begin{aligned}&\overline{G_i(\xi_1)}\,\overline{[\theta\xi_2+(1-\theta)u]G_j(\xi_2)}-\overline{G_j(\xi_2)}\,\overline{[\theta\xi_1+(1-\theta)u]G_i(\xi_1)}\\=&\overline{G_i(\xi_1)[\theta\xi_2+(1-\theta)u]G_j(\xi_2)}-\overline{G_j(\xi_2)[\theta\xi_1+(1-\theta)u]G_i(\xi_1)}\\=&\theta(\xi_2-\xi_1)\overline{G_i(\xi_1)G_j(\xi_2)}.\end{aligned} \tag{9.3.19}$$

记

$$\xi_+=\inf_{(\rho,u)\in\mathrm{supp}\nu}w(\rho,u),\quad \xi_-=\sup_{(\rho,u)\in\mathrm{supp}\nu}z(\rho,u).$$

我们的目标是把 Young 测度归结为点测度, 下面分两种情形来讨论.

情形 I: $\xi_- \leqslant \xi_+$.

若 $\xi_- \leqslant \xi_+$, 我们选取 $G_1 = G_2 = G_3$ 及 $\xi_1, \xi_2 \in (\xi_+, \infty)$ 即可把 (9.3.19) 改写为

$$\frac{\theta}{1-\theta}\left[\frac{\overline{G_+(\xi_1)G_+(\xi_2)}}{\overline{G_+(\xi_1)}\,\overline{G_+(\xi_2)}} - 1\right] = \frac{1}{\xi_2-\xi_1}\left[\frac{\overline{uG_+(\xi_2)}}{\overline{G_+(\xi_2)}} - \frac{\overline{uG_+(\xi_1)}}{\overline{G_+(\xi_1)}}\right], \tag{9.3.20}$$

因为这时 $G_-(\xi_1) = G_-(\xi_2) = 0$. 类似地, 有

$$\frac{\theta}{1-\theta}\left[\frac{\overline{G_-(\xi_1)G_-(\xi_2)}}{\overline{G_-(\xi_1)}\,\overline{G_-(\xi_2)}} - 1\right] = \frac{1}{\xi_2-\xi_1}\left[\frac{\overline{uG_-(\xi_2)}}{\overline{G_-(\xi_2)}} - \frac{\overline{uG_-(\xi_1)}}{\overline{G_-(\xi_1)}}\right] \tag{9.3.21}$$

对 $\xi_1, \xi_2 \in (-\infty, \xi_-)$ 成立.

运用 8.3 节中介绍的相同技巧, 令

$$f_\alpha^\pm = f_0^\pm * j^\alpha = \frac{G_\pm(\xi) - \overline{G_\pm(\xi)}}{\overline{G_\pm(\xi)}} * j^\alpha,$$

则由 (9.3.20), (9.3.21) 推出

$$\frac{\theta}{1-\theta}\overline{(f_\alpha^\pm(\xi))^2} = \frac{1}{\xi_2-\xi_1}\left[\frac{\overline{uG_\pm(\xi_2)}}{\overline{G_\pm(\xi_2)}} - \frac{\overline{uG_\pm(\xi_1)}}{\overline{G_\pm(\xi_1)}}\right] * j^\alpha(\xi_1) * j^\alpha(\xi_2)\,|_{\xi_2=\xi_1=\xi}. \tag{9.3.22}$$

令 $\alpha \to 0^+$, 则上式的左边产生一个负测度, 因为 $1-\theta<0$, 而右边趋于 $\dfrac{\partial}{\partial\xi}\left(\dfrac{\overline{uG_\pm(\xi)}}{\overline{G_\pm(\xi)}}\right)$.

因此, $\dfrac{\overline{uG_+(\xi)}}{\overline{G_+(\xi)}}$ 和 $\dfrac{\overline{uG_-(\xi)}}{\overline{G_-(\xi)}}$ 分别在 (ξ_+, ∞) 和 $(-\infty, \xi_-)$ 内单调非增.

另一方面, 有

$$\begin{aligned}\overline{u} = \lim_{\xi\to\infty}\frac{\overline{uG_+(\xi)}}{\overline{G_+(\xi)}} &\leqslant \lim_{\xi\to\xi_+}\frac{\overline{uG_+(\xi)}}{\overline{G_+(\xi)}} \leqslant \frac{\xi_+ + \xi_-}{2} \\ &\leqslant \lim_{\xi\to\xi_-}\frac{\overline{uG_-(\xi)}}{\overline{G_-(\xi)}} \leqslant \lim_{\xi\to-\infty}\frac{\overline{uG_-(\xi)}}{\overline{G_-(\xi)}} = \overline{u},\end{aligned}$$

所以 $\dfrac{\overline{uG_+(\xi)}}{\overline{G_+(\xi)}}$ 和 $\dfrac{\overline{uG_-(\xi)}}{\overline{G_-(\xi)}}$ 分别在 (ξ_+, ∞) 和 $(-\infty, \xi_-)$ 内是常数. 因此利用等式 (9.3.22) 有 $\overline{(f_\alpha^\pm(\xi))^2} = 0$, 从而 $f_\alpha^\pm(\xi)$ 在 ν 的支集上等于零. 特别地, 令 $\alpha \to 0$ 得

$$f_0^\pm(\xi) = \frac{G(\rho, \xi - u)}{\overline{G(\xi)}} - 1 = 0, \quad (\rho, u) \in \operatorname{supp}\nu.$$

这说明 Young 测度 ν 是一个点测度.

情形 II: $\xi_- > \xi_+$.

若 $\xi_- > \xi_+$, 则用相同的方法可证

$\dfrac{\overline{uG_+(\xi)}}{\overline{G_+(\xi)}}$ 和 $\dfrac{\overline{uG_-(\xi)}}{\overline{G_-(\xi)}}$ 分别在 (ξ_+,∞) 和 $(-\infty,\xi_-)$ 内单调非增.

注意到

$$\lim_{\xi\to\infty}\frac{\overline{uG_+(\xi)}}{\overline{G_+(\xi)}}=\overline{u},\quad \lim_{\xi\to-\infty}\frac{\overline{uG_-(\xi)}}{\overline{G_-(\xi)}}=\overline{u},$$

有不等式

$$\frac{\overline{uG_+(\xi_-)}}{\overline{G_+(\xi_-)}}\geqslant\frac{\overline{uG_-(\xi_+)}}{\overline{G_-(\xi_+)}}. \tag{9.3.23}$$

在等式 (9.3.19) 中选取 $G_i=G_1,\ G_j=G_2$ 及 $\xi_1=\xi_2=\xi$ 即得

$$\begin{aligned}&\overline{(uG_+(\xi)+CuG_0(\xi))(G_-(\xi)+CG_0(\xi))}\\=&\overline{(uG_-(\xi)+CuG_0(\xi))(G_+(\xi)+CG_0(\xi))},\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}&\overline{uG_+(\xi)}\ \overline{G_-(\xi)}+C\overline{uG_0(\xi)}\ \overline{G_-(\xi)}+C\overline{uG_+(\xi)}\ \overline{G_0(\xi)}\\=&\overline{uG_-(\xi)}\ \overline{G_+(\xi)}+C\overline{uG_0(\xi)}\ \overline{G_+(\xi)}+C\overline{uG_-(\xi)}\ \overline{G_0(\xi)}.\end{aligned} \tag{9.3.24}$$

记

$$w_+=\sup_{(\rho,u)\in\operatorname{supp}\nu}w(\rho,u),\quad z_-=\inf_{(\rho,u)\in\operatorname{supp}\nu}z(\rho,u).$$

若选取 $\xi\in(\xi_-,w_+)$, 则 $\overline{uG_-(\xi)}=\overline{G_-(\xi)}=0$, 因而由等式 (9.3.24) 得

$$\frac{\overline{uG_+(\xi)}}{\overline{G_+(\xi)}}=\frac{\overline{uG_0(\xi)}}{\overline{G_0(\xi)}}$$

对 $\xi\in(\xi_-,w_+)$ 成立. 特别地,

$$\frac{\overline{uG_+(\xi_-)}}{\overline{G_+(\xi_-)}}=\frac{\overline{uG_0(\xi_-)}}{\overline{G_0(\xi_-)}}. \tag{9.3.25}$$

类似地, 若选取 $\xi\in(z_-,\xi_+)$, 则

$$\frac{\overline{uG_-(\xi)}}{\overline{G_-(\xi)}}=\frac{\overline{uG_0(\xi)}}{\overline{G_0(\xi)}}$$

对 $\xi\in(z_-,\xi_+)$ 成立. 特别地,

$$\frac{\overline{uG_-(\xi_+)}}{\overline{G_-(\xi_+)}}=\frac{\overline{uG_0(\xi_+)}}{\overline{G_0(\xi_+)}}. \tag{9.3.26}$$

所以由 (9.3.24) 得

$$\begin{aligned}&\frac{\overline{uG_+(\xi)}}{\overline{G_+(\xi)}}+C\frac{\overline{uG_0(\xi)}}{\overline{G_+(\xi)}}+C\frac{\overline{uG_+(\xi)}}{\overline{G_+(\xi)}}\frac{\overline{G_0(\xi)}}{\overline{G_-(\xi)}}\\&=\frac{\overline{uG_-(\xi)}}{\overline{G_-(\xi)}}+C\frac{\overline{uG_0(\xi)}}{\overline{G_-(\xi)}}+C\frac{\overline{uG_-(\xi)}}{\overline{G_-(\xi)}}\frac{\overline{G_0(\xi)}}{\overline{G_+(\xi)}}.\end{aligned}\tag{9.3.27}$$

在等式 (9.3.27) 中令 $\xi\to\xi_+$, 并利用 (9.3.26), 有

$$\begin{aligned}&\frac{\overline{uG_+(\xi_+)}}{\overline{G_+(\xi_+)}}+C\frac{\overline{uG_+(\xi_+)}}{\overline{G_+(\xi_+)}}\frac{\overline{G_0(\xi_+)}}{\overline{G_+(\xi_+)}}+C\frac{\overline{uG_+(\xi_+)}}{\overline{G_+(\xi_+)}}\frac{\overline{G_0(\xi_+)}}{\overline{G_+(\xi_+)}}\\&=\frac{\overline{uG_-(\xi_+)}}{\overline{G_-(\xi_+)}}+C\frac{\overline{uG_+(\xi_+)}}{\overline{G_+(\xi_+)}}\frac{\overline{G_0(\xi_+)}}{\overline{G_-(\xi_+)}}+C\frac{\overline{uG_-(\xi_+)}}{\overline{G_-(\xi_+)}}\frac{\overline{G_0(\xi_+)}}{\overline{G_+(\xi_+)}},\end{aligned}$$

即

$$\frac{\overline{uG_+(\xi_+)}}{\overline{G_+(\xi_+)}}\Big(1+C\frac{\overline{G_0(\xi_+)}}{\overline{G_+(\xi_+)}}\Big)=\frac{\overline{uG_-(\xi_+)}}{\overline{G_-(\xi_+)}}\Big(1+C\frac{\overline{G_0(\xi_+)}}{\overline{G_+(\xi_+)}}\Big).$$

这说明

$$\frac{\overline{uG_+(\xi_+)}}{\overline{G_+(\xi_+)}}=\frac{\overline{uG_-(\xi_+)}}{\overline{G_-(\xi_+)}}.\tag{9.3.28}$$

在等式 (9.3.19) 中令 $G_i=G_j=G_1$, 则由情形 I 中相同方法可证明

$$\frac{\overline{uG_1(\xi)}}{\overline{G_1(\xi)}}\ \text{在}\ (\xi_+,\xi_-)\ \text{内单调非增}.\tag{9.3.29}$$

由等式 (9.3.25) 可推出

$$\begin{aligned}\lim_{\xi\to\xi_-}\frac{\overline{uG_1(\xi)}}{\overline{G_1(\xi)}}&=\lim_{\xi\to\xi_-}\frac{\overline{uG_+(\xi)+CuG_0(\xi)}}{\overline{G_+(\xi)+CG_0(\xi)}}\\&=\lim_{\xi\to\xi_-}\Big(\frac{\overline{uG_+(\xi)}}{\overline{G_+(\xi)}}+C\frac{\overline{uG_0(\xi)}}{\overline{G_0(\xi)}}\frac{\overline{G_0(\xi)}}{\overline{G_+(\xi)}}\Big)\frac{1}{1+C\frac{\overline{G_0(\xi)}}{\overline{G_+(\xi)}}}\\&=\frac{\overline{uG_+(\xi_-)}}{\overline{G_+(\xi_-)}};\end{aligned}$$

而由等式 (9.3.26) 可推出

$$\begin{aligned}\lim_{\xi\to\xi_+}\frac{\overline{uG_1(\xi)}}{\overline{G_1(\xi)}}&=\lim_{\xi\to\xi_+}\frac{\overline{uG_+(\xi)+CuG_0(\xi)}}{\overline{G_+(\xi)+CG_0(\xi)}}\\&=\lim_{\xi\to\xi_+}\Big(\frac{\overline{uG_+(\xi)}}{\overline{G_+(\xi)}}+C\frac{\overline{uG_0(\xi)}}{\overline{G_0(\xi)}}\frac{\overline{G_0(\xi)}}{\overline{G_+(\xi)}}\Big)\frac{1}{1+C\frac{\overline{G_0(\xi)}}{\overline{G_+(\xi)}}}\\&=\frac{\overline{uG_+(\xi_++0)}}{\overline{G_+(\xi_++0)}}.\end{aligned}$$

因此由 (9.3.28), (9.3.29) 立即得到

$$\frac{\overline{uG_+(\xi_-)}}{\overline{G_+(\xi_-)}} \leqslant \frac{\overline{uG_-(\xi_+)}}{\overline{G_-(\xi_+)}}. \tag{9.3.30}$$

把等式 (9.3.30) 与 (9.3.23) 相结合就有 $\frac{\overline{uG_+(\xi)}}{\overline{G_+(\xi)}}$ 和 $\frac{\overline{uG_-(\xi)}}{\overline{G_-(\xi)}}$ 分别在 (ξ_+,∞) 和 $(-\infty,\xi_-)$ 内是常数. 于是从情形 I 的证明可看出此时 ν 仍是点测度. 这与 $\xi_+ > \xi_-$ 矛盾, 因为 $w \geqslant z$. 故只有情形 I 即 $\xi_+ \leqslant \xi_-$ 成立, 因而 ν 是点测度. 根据补偿列紧理论, 存在黏性解的子列 $\{(\rho^{\varepsilon,\delta}, u^{\varepsilon,\delta})\}$ 使得

$$(\rho^{\varepsilon,\delta}(x,t), u^{\varepsilon,\delta}(x,t)) \xrightarrow{\text{a.e.}} (\rho(x,t), u(x,t)) \quad (\varepsilon,\ \delta \to 0),$$

其中 $(\rho(x,t), u(x,t))$ 是柯西问题 (9.3.1)–(9.3.2) 的一个熵解. 证毕. □

9.4 定理 9.3.1 的两个应用

作为定理 9.3.1 的证明中归约 Young 测度的新方法之应用, 讨论二次流系统

$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{4}(3u^2+v^2)_x = 0, \\ v_t + \frac{1}{2}(uv)_x = 0 \end{cases} \tag{9.4.1}$$

与 Le Roux 系统

$$\begin{cases} u_t + \frac{2}{3}(u^2+v)_x = 0, \\ v_t + \frac{2}{3}(uv)_x = 0 \end{cases} \tag{9.4.2}$$

带有界可测初值

$$(u(x,0), v(x,0)) = (u_0(x), v_0(x)) \quad (v_0(x) \geqslant 0) \tag{9.4.3}$$

的柯西问题整体 L^∞ 熵解的存在性.

作伸缩变换 $x \to \frac{1}{2}x$, 系统 (9.4.1) 就化为系统 (6.0.1); 而作伸缩变换 $x \to \frac{2}{3}x$, 系统 (9.4.2) 就化为系统 (7.0.1). 所以系统 (9.4.1) 的两个黎曼不变量为

$$w(u,v) = u + \sqrt{u^2+v^2}, \quad z(u,v) = u - \sqrt{u^2+v^2};$$

系统 (9.4.2) 的两个黎曼不变量为

$$w(u,v) = u + \sqrt{u^2+4v}, \quad z(u,v) = u - \sqrt{u^2+4v}.$$

定理 9.4.1　*设初值 $(u_0(x), v_0(x))$ 有界可测且 $v_0(x) \geqslant 0$, 则柯西问题 (9.4.1)–(9.4.3) 存在整体 L^∞ 熵解 $(u(x,t), v(x,t))$ 满足 $v(x,t) \geqslant 0$.*

证明　首先考虑与系统 (9.4.1) 相关的抛物型方程组

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon + \dfrac{1}{4}(3(u^\varepsilon)^2 + (v^\varepsilon)^2)_x = \varepsilon u_{xx}^\varepsilon, \\ v_t^\varepsilon + \dfrac{1}{2}(u^\varepsilon v^\varepsilon)_x = \varepsilon v_{xx}^\varepsilon \end{cases} \tag{9.4.4}$$

带光滑初值

$$(u^\varepsilon(x,0), v^\varepsilon(x,0)) = (u_0(x), v_0(x) + \varepsilon) * j^\varepsilon \tag{9.4.5}$$

的柯西问题. 我们可利用 6.1 节中的相同方法证得柯西问题 (9.4.4)–(9.4.5) 的黏性解 $(u^\varepsilon(x,t), v^\varepsilon(x,t))$ 全局存在并且满足

$$0 < v^\varepsilon(x,t) \leqslant M, \quad |u^\varepsilon(x,t)| \leqslant M,$$

其中, 常数 $M > 0$ 只依赖于初值的 L^∞ 范数.

接下来用动力学公式给出系统 (9.4.1) 的三族熵–熵流. 令 $\rho = u^2 + v^2, u = u$, 则对于光滑解, 系统 (9.4.1) 等价于

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ u_t + \left(\dfrac{u^2}{2} + \dfrac{\rho}{4}\right)_x = 0. \end{cases} \tag{9.4.6}$$

这正是系统 (9.3.1) 中 $\gamma = 2$ 的情形. 系统 (9.4.6) 的任一熵–熵流 $(\bar\eta(\rho,u), \bar q(\rho,u))$ 满足方程

$$\bar q_\rho = u\bar\eta_\rho + \frac{1}{4}\bar\eta_u, \quad \bar q_u = \rho\bar\eta_\rho + u\bar\eta_u.$$

从上式消去 $\bar q$ 得熵方程

$$\bar\eta_{\rho\rho} = \frac{1}{4\rho}\bar\eta_{uu}. \tag{9.4.7}$$

系统 (9.4.6) 的一族弱熵 $\bar\eta^0$ 为

$$\bar\eta^0(\rho,u) = \int_{\mathbb{R}} g(\xi) G_0(\rho, \xi - u) \mathrm{d}\xi,$$

其相应的弱熵流 $\bar q^0$ 为

$$\bar q^0(\rho,u) = \int_{\mathbb{R}} g(\xi) \frac{\xi + u}{2} G_0(\rho, \xi - u) \mathrm{d}\xi,$$

系统 (9.4.6) 的两族强熵 $\bar\eta^\pm$ 为

$$\bar\eta^\pm(\rho,u) = \int_{\mathbb{R}} g(\xi) G_\pm(\rho, \xi - u) \mathrm{d}\xi,$$

其相应的强熵流 $\bar{q}^{\pm}$ 为

$$\bar{q}^{\pm}(\rho,u)=\int_{\mathbb{R}}g(\xi)\frac{\xi+u}{2}G_{\pm}(\rho,\xi-u)\mathrm{d}\xi,$$

其中, $g(\xi)$ 为任一具有紧支集的非负光滑函数, 基本解

$$\begin{cases} G_0(\rho,\xi-u)=[(w-\xi)(\xi-z)]_+^{\lambda},\\ G_+(\rho,\xi-u)=(\xi-z)^{\lambda}(\xi-w)_+^{\lambda},\\ G_-(\rho,\xi-u)=(w-\xi)^{\lambda}(z-\xi)_+^{\lambda},\end{cases}$$

这里 $\lambda=\dfrac{3-\gamma}{2(\gamma-1)}=\dfrac{1}{2}$.

现在验证上述三族熵-熵流均满足 H_{loc}^{-1} 紧性. 记 $\eta^0(u,v)=\bar{\eta}^0(\rho,u)$, $\eta^1(u,v)=\bar{\eta}^+(\rho,u)$ 和 $\eta^2(u,v)=\bar{\eta}^-(\rho,u)$. 令 $\tau=\xi-w$, 则

$$\begin{aligned}\bar{\eta}^+(\rho,u)&=\int_w^{\infty}g(\xi)(\xi-z)^{\lambda}(\xi-w)^{\lambda}\mathrm{d}\xi\\ &=\int_0^{\infty}g(\tau+w)(\tau+2\rho^{\frac12})^{\lambda}\tau^{\lambda}\mathrm{d}\tau,\\ \bar{\eta}_{\rho}^+(\rho,u)&=\frac{\rho^{-\frac12}}{2}\int_0^{\infty}g'(\tau+w)(\tau+2\rho^{\frac12})^{\lambda}\tau^{\lambda}\mathrm{d}\tau\\ &\quad+\lambda\rho^{-\frac12}\int_0^{\infty}g(\tau+w)(\tau+2\rho^{\frac12})^{\lambda-1}\tau^{\lambda}\mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

这是因为 $w=u+\rho^{\frac12}$, $z=u-\rho^{\frac12}$. 所以 $\bar{\eta}_{\rho}^+=O(\rho^{-\frac12})$ $(\rho\to 0)$.

用分部积分法得

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}g'(\tau+w)(\tau+2\rho^{\frac12})^{\lambda}\tau^{\lambda}\mathrm{d}\tau=&-\lambda\int_0^{\infty}g(\tau+w)(\tau+2\rho^{\frac12})^{\lambda-1}\tau^{\lambda}\mathrm{d}\tau\\ &-\lambda\int_0^{\infty}g(\tau+w)(\tau+2\rho^{\frac12})^{\lambda}\tau^{\lambda-1}\mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

因而

$$\bar{\eta}_{\rho}^+(\rho,u)=-\lambda\int_0^{\infty}g(\tau+w)(\tau+2\rho^{\frac12})^{\lambda-1}\tau^{\lambda-1}\mathrm{d}\tau\leqslant 0. \tag{9.4.8}$$

根据链式法则, 有

$$\eta_{uu}^1=\bar{\eta}_{\rho\rho}^+\rho_u^2+2\bar{\eta}_{\rho u}^+\rho_u+\bar{\eta}_{\rho}^+\rho_{uu}+\bar{\eta}_{uu}^+,$$

$$\eta_{uv}^1=\bar{\eta}_{\rho\rho}^+\rho_u\rho_v+\bar{\eta}_{\rho u}^+\rho_v,\quad \eta_{vv}^1=\bar{\eta}_{\rho\rho}^+\rho_v^2+\bar{\eta}_{\rho}^+\rho_{vv}.$$

不难看出 $\bar{\eta}^+(\rho,u)$ 关于变量 u 光滑, 所以由熵方程 (9.4.7) 知

$$\bar{\eta}_{\rho\rho}^+\rho_u^2=\frac{1}{4\rho}\bar{\eta}_{uu}^+(2u)^2=\bar{\eta}_{uu}^+\frac{u^2}{u^2+v^2}$$

有界. 类似地, $\bar{\eta}^+_{\rho\rho}\rho_v^2$ 和 $\eta^-_{\rho\rho}\rho_u\rho_v$ 都有界. 因为 $\eta_\rho^- = O(\rho^{-\frac{1}{2}})$ $(\rho \to 0)$, 所以易得 $\eta^1(u,v)$ 的二阶导数中除了两项 $\eta_\rho^+\rho_{uu}$, $\eta_\rho^+\rho_{vv} - 2\bar{\eta}_\rho^+$ 外的每一项都有界, 但由 (9.4.8) 知这两项非正.

显然系统 (9.4.1) 有个严格凸熵 $\eta^* = \dfrac{u^2+v^2}{2}$ 及相应的熵流 $q^* = \dfrac{u^3+uv^2}{2}$. 所以

$$\varepsilon(u_x^\varepsilon)^2 \text{ 和 } \varepsilon(v_x^\varepsilon)^2 \text{ 在 } L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+) \text{ 中有界} \tag{9.4.9}$$

在不引起混淆的情况下, 我们将略去上标 ε.

因此用 $\nabla\eta^1(u,v)$ 乘方程组 (9.4.4), 有

$$\begin{aligned}\eta_t^1 + q_x^1 &= \varepsilon\eta_{xx}^1 - \varepsilon(\eta_{uu}^1 u_x^2 + 2\eta_{uv}^1 u_x v_x + \eta_{vv}^1 v_x^2)\\ &= \varepsilon\eta_{xx}^1 - \varepsilon\big(A(\rho,u)u_x^2 + B(\rho,u)u_x v_x\\ &\quad + C(\rho,u)v_x^2\big) - 2\varepsilon\bar{\eta}_\rho^+(u_x^2+v_x^2),\end{aligned} \tag{9.4.10}$$

其中, $A(\rho,u)$, $B(\rho,u)$ 和 $C(\rho,u)$ 是 $\eta^1(u,v)$ 的二阶导数中的正则项.

对任意紧集 $K\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$, 选取函数 $\Phi\in C_c^2$ 使其满足 $\Phi|_K = 1$ 且 $0\leqslant\Phi\leqslant1$, 然后用 Φ 乘 (9.4.10) 并在 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ 上分部积分得

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty 2\varepsilon|\bar{\eta}_\rho^+(\rho,u)|(u_x^2+v_x^2)\Phi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ =&\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty\big[-\varepsilon\eta^1\Phi_{xx} + \varepsilon\big(A(\rho,u)u_x^2 + B(\rho,u)u_x v_x + C(\rho,u)v_x^2\big)\Phi\\ &-\eta^1\Phi_t - q^1\Phi_x\big]\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant M(\Phi),\end{aligned}$$

这是由于 (9.4.8), (9.4.9). 于是 $\varepsilon(\eta_{uu}^1u_x^2 + 2\eta_{uv}^1u_xv_x + \eta_{vv}^1v_x^2)$ 在 L^1_{loc} 中有界, 从而对某个常数 $\alpha\in(1,2)$ 在 $W^{-1,\alpha}$ 中紧. 因为 $\eta_\rho^+ = O(\rho^{-\frac{1}{2}})$　$(\rho\to0)$, 所以 $\bar{\eta}_\rho^+\rho_u$, $\bar{\eta}_\rho^+\rho_v$ 均有界, 因而

$$|\eta_x^1| = |\bar{\eta}_\rho^+(\rho_u u_x + \rho_v v_x) + \bar{\eta}_u^+ u_x| \leqslant C(|u_x| + |v_x|),$$

故 $\varepsilon\eta_{xx}^1$ 在 H^{-1} 中紧. 注意到 $\eta_t^1 + q_x^1$ 在 $W^{-1,\infty}$ 中有界, 所以由嵌入定理, $\eta_t^1 + q_x^1$ 在 H_{loc}^{-1} 中紧. 同理可证熵–熵流 (η^2, q^2) 也满足 H^{-1} 紧性.

在 $\bar{\eta}^0(\rho,u)$ 中令 $\xi = u + \rho^{\frac{1}{2}}s$ 即得

$$\begin{aligned}\bar{\eta}^0(\rho,u) &= \rho\int_{-1}^1 g(u+\rho^{\frac{1}{2}}s)(1-s^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}s,\\ \eta_\rho^0(\rho,u) &= \int_{-1}^1\Big[g(u+\rho^{\frac{1}{2}}s) + \frac{1}{2}\rho^{\frac{1}{2}}sg'(u+\rho^{\frac{1}{2}}s)\Big](1-s^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

故用类似的方法易证 $\eta_t^0 + q_x^0$ 在 H_{loc}^{-1} 中紧.

应用定理 2.2.2, 由测度方程得

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} g(\xi_1)\overline{G_i(\xi_1)}\mathrm{d}\xi_1 \int_{\mathbb{R}} h(\xi_2)\overline{\frac{\xi_2+u}{2}G_j(\xi_2)}\mathrm{d}\xi_2 \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}} h(\xi_2)\overline{G_j(\xi_2)}\mathrm{d}\xi_2 \int_{\mathbb{R}} g(\xi_1)\overline{\frac{\xi_1+u}{2}G_i(\xi_1)}\mathrm{d}\xi_1 \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} g(\xi_1)h(\xi_2)\overline{G_i(\xi_1)\frac{\xi_2+u}{2}G_j(\xi_2)}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2 \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^2} g(\xi_1)h(\xi_2)\overline{G_i(\xi_1)\frac{\xi_1+u}{2}G_j(\xi_2)}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2,
\end{aligned}
$$

其中 G_i 和 G_j 是基本解.

上式对所有具有紧支集的非负光滑函数 g, h 成立, 这蕴涵着

$$
\begin{aligned}
&\overline{G_i(\xi_1)}\,\overline{\frac{\xi_2+u}{2}G_j(\xi_2)} - \overline{G_j(\xi_2)}\,\overline{\frac{\xi_1+u}{2}G_i(\xi_1)} \\
&= \overline{G_i(\xi_1)\frac{\xi_2+u}{2}G_j(\xi_2)} - \overline{G_i(\xi_1)\frac{\xi_1+u}{2}G_j(\xi_2)} \\
&= \frac{\xi_2-\xi_1}{2}\overline{G_i(\xi_1)G_j(\xi_2)}.
\end{aligned}
\tag{9.4.11}
$$

等式 (9.4.11) 非常重要, 它是等式 (9.3.19) 中 $\theta = \dfrac{1}{2}$ 的情形.

记

$$
z_- = \inf_{(\rho,u)\in\mathrm{supp}\nu} z(\rho,u), \quad z_+ = \sup_{(\rho,u)\in\mathrm{supp}\nu} z(\rho,u),
$$
$$
w_- = \inf_{(\rho,u)\in\mathrm{supp}\nu} w(\rho,u), \quad w_+ = \sup_{(\rho,u)\in\mathrm{supp}\nu} w(\rho,u).
$$

若选取 $G_i = G_j = G_+$ 且 ξ_1, $\xi_2 \in (w_-, +\infty)$, 则等式 (9.4.11) 改写为

$$
\frac{\overline{G_+(\xi_1)G_+(\xi_2)}}{\overline{G_+(\xi_1)}\,\overline{G_+(\xi_2)}} - 1 = \frac{1}{\xi_2-\xi_1}\left[\frac{\overline{uG_+(\xi_2)}}{\overline{G_+(\xi_2)}} - \frac{\overline{uG_+(\xi_1)}}{\overline{G_+(\xi_1)}}\right]. \tag{9.4.12}
$$

同理可知

$$
\frac{\overline{G_-(\xi_1)G_-(\xi_2)}}{\overline{G_-(\xi_1)}\,\overline{G_-(\xi_2)}} - 1 = \frac{1}{\xi_2-\xi_1}\left[\frac{\overline{uG_-(\xi_2)}}{\overline{G_-(\xi_2)}} - \frac{\overline{uG_-(\xi_1)}}{\overline{G_-(\xi_1)}}\right] \tag{9.4.13}
$$

对任意 ξ_1, $\xi_2 \in (-\infty, z_+)$ 成立.

令 $f_0^{\pm}(\xi) = \dfrac{G_{\pm} - \overline{G_{\pm}(\xi)}}{\overline{G_{\pm}(\xi)}}$, 则等式 (9.4.12)-(9.4.13) 化为与之等价的下述形式:

$$
\overline{f_0^{\pm}(\xi_1)f_0^{\pm}(\xi_2)} = \frac{1}{\xi_2-\xi_1}\left[\frac{\overline{uG_{\pm}(\xi_2)}}{\overline{G_{\pm}(\xi_2)}} - \frac{\overline{uG_{\pm}(\xi_1)}}{\overline{G_{\pm}(\xi_1)}}\right]. \tag{9.4.14}
$$

记 $f_\alpha^\pm = f_0^\pm * j^\alpha$, 则由 (9.4.14) 得

$$\overline{f_\alpha^\pm(\xi_1) f_\alpha^\pm(\xi_2)} = \frac{1}{\xi_2 - \xi_1}\left[\frac{\overline{uG_\pm(\xi_2)}}{\overline{G_\pm(\xi_2)}} - \frac{\overline{uG_\pm(\xi_1)}}{\overline{G_\pm(\xi_1)}}\right] * j^\alpha(\xi_1) * j^\alpha(\xi_2).$$

由于上式的左边有界而右边光滑, 因而我们可取 $\xi_2 = \xi_1 = \xi$ 得到

$$\overline{(f_\alpha^\pm(\xi))^2} = \frac{1}{\xi_2 - \xi_1}\left[\frac{\overline{uG_\pm(\xi_2)}}{\overline{G_\pm(\xi_2)}} - \frac{\overline{uG_\pm(\xi_1)}}{\overline{G_\pm(\xi_1)}}\right] * j^\alpha(\xi_1) * j^\alpha(\xi_2)|_{\xi_2=\xi_1=\xi}. \tag{9.4.15}$$

令 $\alpha \to 0^+$, 则上式左端产生一个正测度, 而右端趋于 $\dfrac{\partial}{\partial\xi}\left(\dfrac{\overline{uG_\pm(\xi)}}{\overline{G_\pm(\xi)}}\right)$. 因此, $\dfrac{\overline{uG_+(\xi)}}{\overline{G_+(\xi)}}$ 和 $\dfrac{\overline{uG_-(\xi)}}{\overline{G_-(\xi)}}$ 分别在 (w_-, ∞) 和 $(-\infty, z_+)$ 内单调非减.

情形 I: $z_+ \leqslant w_-$.

若 $z_+ \leqslant w_-$, 则用上述方法可证 $\dfrac{\overline{uG_0(\xi)}}{\overline{G_0(\xi)}}$ 在 (z_-, w_+) 内单调非减.

在 (9.4.11) 中选取 $G_i = G_+$, $G_j = G_0$ 及 $\xi_2 = \xi_1 = \xi$ 得 $\overline{uG_+(\xi)}\ \overline{G_0(\xi)} = \overline{uG_0(\xi)}\ \overline{G_+(\xi)}$. 于是

$$\frac{\overline{uG_+(\xi)}}{\overline{G_+(\xi)}} = \frac{\overline{uG_0(\xi)}}{\overline{G_0(\xi)}}$$

对 $\xi \in (w_-, w_+)$ 成立, 特别地,

$$\lim_{\xi \to w_- + 0} \frac{\overline{uG_+(\xi)}}{\overline{G_+(\xi)}} = \frac{\overline{uG_0(w_-)}}{\overline{G_0(w_-)}}.$$

类似地, 有

$$\frac{\overline{uG_-(\xi)}}{\overline{G_-(\xi)}} = \frac{\overline{uG_0(\xi)}}{\overline{G_0(\xi)}}$$

对 $\xi \in (z_-, z_+)$ 成立. 特别地,

$$\lim_{\xi \to z_+ - 0} \frac{\overline{uG_-(\xi)}}{\overline{G_-(\xi)}} = \frac{\overline{uG_0(z_+)}}{\overline{G_0(z_+)}}.$$

所以

$$\begin{aligned}\overline{u} = \lim_{\xi\to\infty} \frac{\overline{uG_+(\xi)}}{\overline{G_+(\xi)}} &\geqslant \lim_{\xi \to w_- + 0} \frac{\overline{uG_+(\xi)}}{\overline{G_+(\xi)}} = \frac{\overline{uG_0(w_-)}}{\overline{G_0(w_-)}} \\ &\geqslant \frac{\overline{uG_0(z_+)}}{\overline{G_0(z_+)}} \geqslant \lim_{\xi \to z_+ - 0} \frac{\overline{uG_-(\xi)}}{\overline{G_-(\xi)}} \geqslant \lim_{\xi \to -\infty} \frac{\overline{uG_-(\xi)}}{\overline{G_-(\xi)}} = \overline{u}.\end{aligned}$$

因此由函数 $\dfrac{\overline{uG_+(\xi)}}{\overline{G_+(\xi)}}$, $\dfrac{\overline{uG_-(\xi)}}{\overline{G_-(\xi)}}$ 的单调性知它们分别在 (w_-,∞) 和 $(-\infty,z_+)$ 内为常数, 从而由 (9.4.15) 推出 Young 测度 ν 是一个点测度.

情形 II: $z_+>w_-$.

若 $z_+>w_-$, 在 (9.4.11) 中选取 $G_i=G_+$, $G_j=G_-$ 及 $\xi_2=\xi_1=\xi$ 得 $\overline{uG_+(\xi)}\;\overline{G_-(\xi)}=\overline{uG_-(\xi)}\;\overline{G_+(\xi)}$. 于是

$$\frac{\overline{uG_+(\xi)}}{\overline{G_+(\xi)}}=\frac{\overline{uG_-(\xi)}}{\overline{G_-(\xi)}}$$

对 $\xi\in(w_-,z_+)$ 成立. 特别地,

$$\lim_{\xi\to w_-+0}\frac{\overline{uG_+(\xi)}}{\overline{G_+(\xi)}}=\frac{\overline{uG_-(w_-)}}{\overline{G_-(w_-)}},\quad \lim_{\xi\to z_+-0}\frac{\overline{uG_-(\xi)}}{\overline{G_-(\xi)}}=\frac{\overline{uG_+(z_+)}}{\overline{G_+(z_+)}}.$$

所以

$$\begin{aligned}\overline{u}=\lim_{\xi\to\infty}\frac{\overline{uG_+(\xi)}}{\overline{G_+(\xi)}}\geqslant\frac{\overline{uG_+(z_+)}}{\overline{G_+(z_+)}}&=\lim_{\xi\to z_+-0}\frac{\overline{uG_-(\xi)}}{\overline{G_-(\xi)}}\\&\geqslant\lim_{\xi\to w_-+0}\frac{\overline{uG_+(\xi)}}{\overline{G_+(\xi)}}=\frac{\overline{uG_-(w_-)}}{\overline{G_-(w_-)}}\geqslant\lim_{\xi\to-\infty}\frac{\overline{uG_-(\xi)}}{\overline{G_-(\xi)}}=\overline{u}.\end{aligned}$$

因此由函数 $\dfrac{\overline{uG_+(\xi)}}{\overline{G_+(\xi)}}$, $\dfrac{\overline{uG_-(\xi)}}{\overline{G_-(\xi)}}$ 的单调性知它们分别在 (w_-,∞) 和 $(-\infty,z_+)$ 内为常数. 这表明此时 Young 测度 ν 仍是点测度. 这与假设 $z_+>w_-$ 矛盾, 因为 $w\geqslant z$. 故只有情形 I 即 $z_+\leqslant w_-$ 成立, 因而 ν 是点测度. 根据补偿列紧理论, 存在黏性解的子列 $\{(u^\varepsilon(x,t),v^\varepsilon(x,t))\}$ 几乎处处收敛于柯西问题 (9.4.1)–(9.4.3) 的 L^∞ 熵解 $(u(x,t),v(x,t))$. 证毕. □

定理 9.4.2 *设初值 $(u_0(x),\ v_0(x))$ 有界可测, 且 $v_0(x)\geqslant 0$, 则柯西问题 (9.4.2) (9.4.3) 的 L^∞ 熵解 $(u(x,t),v(x,t))$ 全局存在且满足 $v(x,t)\geqslant 0$.*

证明 首先可利用 7.1 节中的相同方法证得相应的抛物型方程组带初值 (9.3.5) 的柯西问题的黏性解 $(u^\varepsilon(x,t),v^\varepsilon(x,t))$ 全局存在, 并且满足

$$0<v^\varepsilon(x,t)\leqslant M,\quad |u^\varepsilon(x,t)|\leqslant M,$$

其中, 常数 $M>0$ 只依赖于初值的 L^∞ 范数.

现在用动力学公式给出系统 (9.4.2) 的三族熵–熵流. 令 $\rho=(u^2+4v)^{\frac{3}{2}}$, $u=u$, 则对于光滑解, 系统 (9.4.2) 等价于

$$\begin{cases}\rho_t+(\rho u)_x=0,\\ u_t+\left(\dfrac{u^2}{2}+\dfrac{1}{6}\rho^{\frac{2}{3}}\right)_x=0.\end{cases}\tag{9.4.16}$$

这正是系统 (9.3.1) 中 $\gamma = 5/3$ 的情形. 系统 (9.4.16) 的熵–熵流 $(\bar{\eta}, \bar{q})$ 满足方程组

$$\bar{q}_\rho = u\bar{\eta}_\rho + \frac{1}{9}\rho^{-\frac{1}{3}}\bar{\eta}_u, \quad \bar{q}_u = \rho\bar{\eta}_\rho + u\bar{\eta}_u.$$

从上式消去 q 得熵方程

$$\bar{\eta}_{\rho\rho} = \frac{1}{9}\rho^{-\frac{4}{3}}\bar{\eta}_{uu}.$$

所以系统 (9.4.16) 的熵–熵流由下述三个基本解生成:

$$\begin{cases} G_0(\rho, \xi - u) = [(w - \xi)(\xi - z)]_+, \\ G_+(\rho, \xi - u) = (\xi - z)(\xi - w)_+, \\ G_-(\rho, \xi - u) = (w - \xi)(z - \xi)_+, \end{cases}$$

因为此时 $\lambda = \dfrac{3-\gamma}{2(\gamma-1)} - 1$, 其中 $w = u + \rho^{\frac{1}{3}}$, $z = u - \rho^{\frac{1}{3}}$.

具体地说, 系统 (9.4.16) 的一族弱熵 $\bar{\eta}^0$ 为

$$\bar{\eta}^0(\rho, u) = \int_{\mathbb{R}} g(\xi) G_0(\rho, \xi - u) \mathrm{d}\xi,$$

其相应的弱熵流 $\bar{q}^0$ 为

$$\bar{q}^0(\rho, u) = \int_{\mathbb{R}} g(\xi) \frac{\xi + 2u}{3} G_0(\rho, \xi - u) \mathrm{d}\xi;$$

系统 (9.4.16) 的两族强熵 $\bar{\eta}^\pm$ 为

$$\bar{\eta}^\pm(\rho, u) = \int_{\mathbb{R}} g(\xi) G_\pm(\rho, \xi - u) \mathrm{d}\xi,$$

其相应的强熵流 $\bar{q}^\pm$ 为

$$\bar{q}^\pm(\rho, u) = \int_{\mathbb{R}} g(\xi) \frac{\xi + 2u}{3} G_\pm(\rho, \xi - u) \mathrm{d}\xi,$$

其中, $g(\xi)$ 是任意具有紧支集的非负光滑函数.

显然系统 (9.4.2) 有个严格凸熵–熵流

$$\eta^*(u, v) = \frac{u^2}{2} + \int_0^v \ln v \mathrm{d}v, \quad q^*(u, v) = \frac{4u^3}{9} + \frac{2}{3} uv \ln v,$$

所以 $\varepsilon(u_x^\varepsilon)^2$ 和 $\varepsilon\dfrac{(v_x^\varepsilon)^2}{v^\varepsilon}$ 在 $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ 中有界.

剩余部分与定理 9.4.1 的证明几乎相同, 只要用等式 (9.3.19) 中 $\theta = \dfrac{1}{3}$ 的情形替换 (9.4.11) 即可. 限于篇幅, 这里不再赘述. 证毕. □

评　注

DiPerna[66] 利用 Glimm 方法建立了系统 (9.0.1) 的大初值有界变差广义解的全局存在性定理, 如果压强函数 $P(\rho)$ 满足适当的条件, 例如 $P(\rho)=k^2\rho^\gamma$ $(\gamma\in(1,3))$, 使得图 9.3 中所描绘的不变域

$$\Sigma_8=\{(\rho,u):w(\rho,u)\leqslant N,\ z(\rho,u)\geqslant -N\}$$

远离真空态 $\rho=0$.

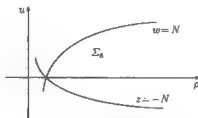


图 9.3　$\gamma<3$ 时系统 (9.0.10) 的不变域

对于这一类函数 $P(\rho)$, Glimm 方法有效是因为系统 (9.0.1) 严格双曲, 它的两个特征值在区域 Σ_8 上互异. 这种情形下弱解的唯一性由 Bressan[67] 得到. 但是对于 $P(\rho)=k^2\rho^\gamma$ $(\gamma>3)$ 或者在第 10 章给出的更一般的压强函数 $P(\rho)$, Glimm 方法失效, 因为这时系统 (9.0.1) 的不变域如同图 9.1 中对 $P(\rho)=\int_0^\rho s^2\mathrm{e}^s\mathrm{d}s$ 或 $P(\rho)=\int_0^\rho s^2(s+d)^{\gamma-3}\mathrm{d}s$ $(\gamma>3)$ 的情形所描绘的一样, 总是包含非严格双曲的直线 $\rho=0$.

本章对 $P(\rho)=\int_0^\rho s^2\mathrm{e}^s\mathrm{d}s$ 的情形的证明选自文献 [68], 而对 $P(\rho)=\int_0^\rho s^2(s+d)^{\gamma-3}\mathrm{d}s$ 的情形的证明选自文献 [69].

欧拉方程组 (9.3.1) 是个非常有趣的双曲系统, 因为它和多方气体动力学系统有着相同的熵–熵流, 所以很多学者曾对它进行研究. Lu[70] 创造性地引入新的扰动技巧, 使得新、老方程组保持许多基本量的不变性, 并且发现了三族满足 $H^{-1}_{\rm loc}$ 紧性的强、弱熵的线性组合, 从而结束了对这一古老方程组广义解的存在性研究. 引理 9.3.3 的证明选自文献 [70]. 值得一提的是: 尽管我们的兴趣集中于黏性消失法, 但这个证明中建立的紧性框架还涉及 Friedrich-Lax 逼近和 Godunov 逼近.

作为文献 [70] 中基本思想的应用, 9.4 节对二次流系统与 Le Roux 系统熵解的存在性给了一个非常简洁的证明, 这一部分的内容选自文献 [71, 72].

第 10 章　一般的可压缩流体流的欧拉方程组

本章讨论下述非线性双曲系统:

$$\begin{cases} u_t + \left(\dfrac{1}{2}u^2 + f(v)\right)_x = 0, \\ v_t + (uv + g(v))_x = 0 \end{cases} \tag{10.0.1}$$

带有界可测初值

$$(u(x,0), v(x,0)) = (u_0(x), v_0(x)) \tag{10.0.2}$$

的柯西问题. 当 $g(v) = 0$ 时, 系统 (10.0.1) 与 (9.0.1) 相同, 如果用 v 替换系统 (9.0.1) 中的 ρ.

在第 6、第 7 和第 9 章，我们应用补偿列紧方法研究了二次流系统、Le Roux 系统以及特殊的欧拉方程组. 从这些应用可以看出, 由于这些系统显式地给出了流函数, 我们可作一些适当的变换, 然后通过对经典 Fuchsian 方程的分析显示地构造出 Lax 型熵–熵流从而得到这些熵–熵流间必要的估计. 基于这些估计并利用补偿列紧理论发展起来的一些思想, 可以证明这些系统大初值弱解的全局存在性. 在第 8 章, 流函数 $P(\rho) = k^2\rho^\gamma$ 非常有助于弱熵–熵流的构造, 而它们显然是建立黏性解序列的紧性从而得到弱解存在性的关键.

系统 (10.0.1) 与上面几章考虑的系统情况不同, 因为它的非线性流函数是隐式的. Lax[26,73] 详细分析了一般的严格双曲系统或系统在其严格双曲区域内的熵–熵流的结构及其性质. 然而为了把补偿列紧方法应用于一些非严格双曲的系统, 如系统 (10.0.1), 必须应用一些新的技巧来构造熵–熵流.

为了便于研究, 我们对流函数 $f(v)$, $g(v)$ 和初值加上下述假设:

(A_1)　$f,\ g \in C^3[0,\infty)$, $f_1 = (f'/v) \in C^2[0,\infty)$, $g_1 = (g'/v) \in C^2[0,\infty)$ 满足 $f_1 \geqslant d$ 并且

$$2f_1' + g_1'(s_1 + g_1) \geqslant 0, \quad \forall v \geqslant 0,$$
$$2f_1' - g_1'(s_1 - g_1) \geqslant 0, \quad \forall v \geqslant 0,$$

其中, d 是给定的正常数, $s_1 = \sqrt{g_1^2 + 4f_1}$;

(A_2)　初值 $(u_0(x), v_0(x))$ 有界可测且 $v_0(x) \geqslant 0$.

注 10.0.1 除了可压缩流体流的欧拉方程组 (9.0.1) 中 $P(\rho)=\int_0^\rho s^2e^s\mathrm{d}s$ 或 $P(\rho)=\int_0^\rho s^2(s+d)^{\gamma-3}\mathrm{d}s\ (d>0,\ \gamma>3)$ 的情形之外, 这里还有许多函数 f, g 满足条件 (A_1). 例如, 可选取 $f_1=(v+d)^l$, $g_1=k(v+e)^m$, 其中, k 是非负常数, 正常数 d, e, m, l 满足 $e\geqslant d$, $l\geqslant m$. 容易验证此时满足 (A_1).

经过简单计算, 系统 (10.0.1) 的两个特征值为

$$\lambda_1=\frac{2u+vg_1(v)-vs_1}{2},\quad \lambda_2=\frac{2u+vg_1(v)+vs_1}{2},$$

其相应的右特征向量为

$$r_1=(-2f_1,s_1-g_1)^{\mathrm{T}},\quad r_2=(2f_1,s_1+g_1)^{\mathrm{T}},$$

因而利用假设 (A_1), 我们有

$$\begin{aligned}\nabla\lambda_1\cdot r_1&=-2f_1+(s_1-g_1)\left[\frac{vg_1'+g_1-s_1}{2}-\frac{v(g_1g_1'+2f_1')}{2s_1}\right]\\&=\frac{1}{2s_1}\{-4f_1s_1+(s_1-g_1)[s_1(vg_1'+g_1)-s_1^2-vg_1g_1'-2vf_1']\}\\&\leqslant\frac{1}{2s_1}[-4f_1s_1+(s_1-g_1)(s_1g_1-s_1^2)]\\&=\frac{1}{2}(-4f_1-(s_1-g_1)^2)<0\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\nabla\lambda_2\cdot r_2&=2f_1+(s_1+g_1)\left[\frac{vg_1'+g_1+s_1}{2}+\frac{v(g_1g_1'+2f_1')}{2s_1}\right]\\&\geqslant\frac{1}{2}(4f_1+(s_1+g_1)^2)>0.\end{aligned}$$

因此系统 (10.0.1) 在直线 $v=0$ 上非严格双曲, 但两个特征场真正非线性.

10.1 一般欧拉方程组的黏性解

在系统 (10.0.1) 中加上正的抛物扰动项, 考虑系统

$$\begin{cases}u_t+\left(\dfrac{1}{2}u^2+f(v)\right)_x=\varepsilon u_{xx},\\ v_t+(uv+g(v))_x=\varepsilon v_{xx}\end{cases}\tag{10.1.1}$$

带光滑初值

$$(u(x,0),v(x,0))=(u_0^\varepsilon(x),v_0^\varepsilon(x))=(u_0(x),v_0(x))*j^\varepsilon\tag{10.1.2}$$

的柯西问题, 有

定理 10.1.1　*如果条件 (A_1), (A_2) 成立, 那么对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 柯西问题 (10.1.1) (10.1.2) 存在唯一的整体光滑解 $(u^\varepsilon(x,t), v^\varepsilon(x,t))$ 满足*

$$|u^\varepsilon(x,t)| \leqslant M, \quad 0 \leqslant v^\varepsilon(x,t) \leqslant M, \tag{10.1.3}$$

其中, M 为与 ε 无关的正常数.

证明　直接的计算表明:

$$w = u + \int_0^v \frac{g_1 + s_1}{2} \mathrm{d}v, \quad z = u + \int_0^v \frac{g_1 - s_1}{2} \mathrm{d}v \tag{10.1.4}$$

是系统 (10.0.1) 的两个黎曼不变量. 由假设 (A_1), 沿着曲线 $w = N$ 有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = -\frac{g_1 + s_1}{2} \leqslant 0, \quad \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}v^2} = -\frac{2f_1' + g_1'(g_1 + s_1)}{2s_1} \leqslant 0, \quad \forall v \geqslant 0;$$

而沿着曲线 $z = -N$ 有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = \frac{-g_1 + s_1}{2} \geqslant 0, \quad \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}v^2} = \frac{2f_1' + g_1'(g_1 - s_1)}{2s_1} \geqslant 0, \quad \forall v \geqslant 0.$$

因此, 根据定理 4.2.1, 容易验证

$$D_3 = \{(u,v) : w(u,v) \leqslant N,\ z(u,v) \geqslant -N,\ v \geqslant 0\}$$

是系统 (10.1.1) 的一个不变域, 它与图 9.1 中的 Σ_6 有着相似的图形, 其中常数 $N > 0$ 只依赖于初值的 L^∞ 范数. 这蕴涵着黏性解的 L^∞ 界估计 (10.1.3) 及其存在性. 证毕. □

10.2　一般欧拉方程组的 Lax 熵和弱解

我们先构造系统 (10.0.1) 的具有下述特殊形式的熵-熵流

$$\begin{aligned}
\eta_k^1 &= \mathrm{e}^{kw}\left(a_1(v) + \frac{b_1(v,k)}{k}\right), & q_k^1 &= \mathrm{e}^{kw}\left(c_1(v) + \frac{d_1(v,k)}{k}\right), \\
\eta_{-k}^2 &= \mathrm{e}^{-kw}\left(a_2(v) + \frac{b_2(v,k)}{k}\right), & q_{-k}^2 &= \mathrm{e}^{-kw}\left(c_2(v) + \frac{d_2(v,k)}{k}\right), \\
\eta_{-k}^1 &= \mathrm{e}^{-kz}\left(a_3(v) + \frac{b_3(v,k)}{k}\right), & q_{-k}^1 &= \mathrm{e}^{-kz}\left(c_3(v) + \frac{d_3(v,k)}{k}\right), \\
\eta_k^2 &= \mathrm{e}^{kz}\left(a_4(v) + \frac{b_4(v,k)}{k}\right), & q_k^2 &= \mathrm{e}^{kz}\left(c_4(v) + \frac{d_4(v,k)}{k}\right),
\end{aligned}$$

其中, w, z 是由式 (10.1.4) 给出的系统 (10.0.1) 的两个黎曼不变量. 然后应用二阶常微分方程的奇异扰动理论得到关于函数 $a_i(v)$, $b_i(v,k)$ $(i = 1,2,3,4)$ 的一些必要估计.

根据定义, 系统 (10.0.1) 的熵 熵流 (η, q) 为满足

$$(u\eta_u + v\eta_v, f'\eta_u + (u+g')\eta_v) = (q_u, q_v) \tag{10.2.1}$$

的函数对. 从 (10.2.1) 消去 q 即得熵方程

$$f'\eta_{uu} + g'\eta_{uv} - v\eta_{vv} = 0. \tag{10.2.2}$$

把熵 $\eta_k^1 = \mathrm{e}^{kw}(a_1(v) + b_1(v,k)/k)$ 代入 (10.2.2) 有

$$k\left[s_1 a_1' + \frac{g_1'(g_1+s_1)+2f_1'}{2s_1}a_1\right] + a_1'' + s_1 b_1' + \frac{g_1'(g_1+s_1)+2f_1'}{2s_1}b_1 + \frac{b_1''}{k} = 0.$$

令

$$s_1 a_1' + \frac{g_1'(g_1+s_1)+2f_1'}{2s_1}a_1 = 0 \tag{10.2.3}$$

及

$$a_1'' + s_1 b_1' + \frac{g_1'(g_1+s_1)+2f_1'}{2s_1}b_1 + \frac{b_1''}{k} = 0, \tag{10.2.4}$$

则求解方程 (10.2.3) 得

$$a_1 = \exp\left\{-\int_0^v \frac{g_1'(g_1+s_1)+2f_1'}{2s_1^2}\mathrm{d}v\right\} > 0 \quad (v \geqslant 0).$$

b_1 的存在性以及关于 k 的一致界可由引理 8.6.1 得到.

进一步, 我们还可以应用引理 8.6.1 得到 b_1' 关于 k 的一致界, 如果把方程 (10.2.4) 对 v 求导.

显然 (10.2.1) 等价于

$$q_u = u\eta_u + v\eta_v, \quad q_v = f'\eta_u + (u+g')\eta_v,$$

所以系统 (10.0.1) 的一个前进波为

$$\eta_k^1 = \mathrm{e}^{kw}\left(a_1(v) + \frac{b_1(v,k)}{k}\right), \quad q_k^1 = \lambda_2\eta_k^1 + \mathrm{e}^{kw}\left(\frac{va_1' - a_1}{k} + \frac{vb_1' - b_1}{k^2}\right). \tag{10.2.5}$$

利用同样的方法, 可以得到另外三族 Lax 型熵–熵流:

$$\begin{aligned} &\eta_{-k}^2 = \mathrm{e}^{-kw}\left(a_2(v) + \frac{b_2(v,k)}{k}\right), \\ &q_{-k}^2 - \lambda_2\eta^2{}_k + \mathrm{e}^{-kw}\left(\frac{a_2 - va_2'}{k} + \frac{b_2 - vb_2'}{k^2}\right), \end{aligned} \tag{10.2.6}$$

其中, $a_2(v) = a_1(v)$, $b_2(v,k)$ 满足

$$a_1'' - s_1 b_2' - \frac{g_1'(g_1+s_1)+2f_1'}{2s_1}b_2 + \frac{b_2''}{k} \quad 0; \tag{10.2.7}$$

$$\begin{aligned}&\eta_k^2 = \mathrm{e}^{kz}\left(a_3(v) + \frac{b_3(v,k)}{k}\right),\\&q_k^2 = \lambda_1\eta_k^2 + \mathrm{e}^{kz}\left(\frac{va_3' - a_3}{k} + \frac{vb_3' - b_3}{k^2}\right),\end{aligned}\tag{10.2.8}$$

其中, 函数 $a_3(v)$, $b_3(v,k)$ 满足

$$s_1a_3' + \frac{g_1'(g_1 - s_1) + 2f_1'}{2s_1}a_3 = 0,\tag{10.2.9}$$

$$a_3'' - s_1b_3' - \frac{g_1'(g_1 - s_1) + 2f_1'}{2s_1}b_3 + \frac{b_3''}{k} = 0;\tag{10.2.10}$$

$$\begin{aligned}&\eta_{-k}^1 = \mathrm{e}^{-kz}\left(a_4(v) + \frac{b_4(v,k)}{k}\right),\\&q_{-k}^1 = \lambda_1\eta_{-k}^1 + \mathrm{e}^{-kz}\left(\frac{a_4 - va_4'}{k} + \frac{b_4 - vb_4'}{k^2}\right),\end{aligned}\tag{10.2.11}$$

其中, $a_4(v) = a_3(v)$, $b_4(v,k)$ 满足

$$a_3'' + s_1b_4' + \frac{g_1'(g_1 - s_1) + 2f_1'}{2s_1}b_4 + \frac{b_4''}{k} = 0.\tag{10.2.12}$$

求解 (10.2.9) 得

$$a_4 = a_3 = \exp\left\{-\int_0^v \frac{g_1'(g_1 - s_1) + 2f_1'}{2s_1^2}\mathrm{d}v\right\} > 0 \quad (v \geqslant 0).$$

把引理 8.6.1 依次应用于方程 (10.2.7), (10.2.10) 与 (10.2.12) 即可得到 $b_i(v,k)$ $(i = 2,3,4)$ 的存在性及 $b_i(v,k)$, $b_i'(v,k)$ 关于 k 的一致界估计. 此外, 利用假设 (A_1), 我们有 $a_i(v) - va_i'(v)$ $(i = 1,2,3,4)$ 在 $v \geqslant 0$ 上恒正.

引理 10.2.1　*系统 (10.0.1) 的上述任何 Lax 型熵-熵流 $(\eta(u,v), q(u,v))$ 满足*

$$\eta(u^\varepsilon, v^\varepsilon)_t + q(u^\varepsilon, v^\varepsilon)_x \quad 在\ H_{\mathrm{loc}}^{-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)\ 中紧,$$

其中, $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ 是柯西问题 (10.1.1)-(10.1.2) 的黏性解.

证明　容易验证系统 (10.0.1) 有个严格凸熵

$$\eta^* = \frac{1}{2}u^2 + \int_0^v\int_0^y \frac{f'(s)}{s}\mathrm{d}s\mathrm{d}y,$$

所以

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}}\partial_x u^\varepsilon,\ \varepsilon^{\frac{1}{2}}\partial_x v^\varepsilon\ 在\ L_{\mathrm{loc}}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)\ 中有界.\tag{10.2.13}$$

注意到由上面构造的任何 Lax 型熵-熵流 $(\eta(u,v), q(u,v))$ 在 $v \geqslant 0$ 上二阶连续可微, 所以由 (10.2.13) 和定理 2.3.1 即可完成本引理的证明. 证毕. □

利用 $a_i(v) - va_i'(v)$ $(i = 1,2,3,4)$ 的恒正性以及这些熵-熵流的相关估计, 我们就可以用第 6 章中相同的方法把从属于黏性解序列的 Young 测度归约为点测度, 从而得到本章的主要结果.

定理 10.2.1 如果条件 (A_1), (A_2) 成立, 那么存在柯西问题 (10.1.1), (10.1.2) 的黏性解的子列 $\{(u^\varepsilon(x,t), v^\varepsilon(x,t))\}$ 使得

$$(u^\varepsilon(x,t), v^\varepsilon(x,t)) \xrightarrow{\text{a.e.}} (u(x,t), v(x,t)) \quad (\varepsilon \to 0),$$

其中, 极限函数 $(u(x,t), v(x,t))$ 是柯西问题 (10.0.1) (10.0.2) 的弱解.

评 注

本章的内容选自文献 [74]. 依据二阶常微分方程的奇异扰动理论构造非严格双曲系统的熵–熵流这一思想在文献 [56] 中得到推广而应用于一些带源项的双曲系统的研究.

第 11 章　推广的弹性力学系统

我们考虑下述推广的弹性力学系统

$$\begin{cases} u_t + (cu + f(v))_x = 0, \\ v_t + (u + g(v))_x = 0 \end{cases} \tag{11.0.1}$$

带有界可测初值

$$(u(x,0), v(x,0)) = (u_0(x), v_0(x)) \tag{11.0.2}$$

的柯西问题整体弱解的存在性, 其中 c 是常数.

当 $g(v) \equiv 0$ 且 $c = 0$ 时, 系统 (11.0.1) 是拉格朗日坐标系下的一维非线性弹性力学系统, 它用来刻画质量和线性动量的守恒, 其中 v 表示拉力, $f(v)$ 是压力, u 表示速度.

对于一般情形下的系统 (11.0.1), 我们要求函数 $f(v)$ 与 $g(v)$ 满足下面的假设.

(A) $f,\ g \in C^3(\mathbb{R})$ 满足 $f'(v) \geqslant d\ (v \in \mathbb{R})$, 并且

$$2f'' + g''(s_2 + g' - c) > 0, \quad \forall v > 0,$$

$$2f'' + g''(s_2 + g' - c) < 0, \quad \forall v < 0,$$

$$2f'' + g''(g' - c - s_2) > 0, \quad \forall v > 0,$$

$$2f'' + g''(g' - c - s_2) < 0, \quad \forall v < 0,$$

其中, $s_2 = \sqrt{(g' - c)^2 + 4f'}$.

注 11.0.1　*除了经典的弹性力学系统之外, 这里还有许多函数 $f,\ g$ 满足条件 (A). 例如, 可选取 $f'(v) = (v^2 + d)^l$, $g'(v) - c = k(v^2 + e)^m$, 其中 k 是非负常数, 正常数 $d,\ e,\ m,\ l$ 满足 $e \geqslant d$, $l \geqslant m$. 容易验证此时 (A) 成立.*

经过简单计算, 系统 (11.0.1) 的两个特征值为

$$\lambda_1 = \frac{c + g' - s_2}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{c + g' + s_2}{2},$$

其相应的右特征向量为

$$\boldsymbol{r}_1 = (g' - c + s_2, -2)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{r}_2 = (g' - c - s_2, -2)^{\mathrm{T}},$$

因而

$$\nabla\lambda_1 \cdot \boldsymbol{r}_1 = \frac{2f'' - g''[s_2 - (g' - c)]}{s_2},$$
$$\nabla\lambda_2 \cdot \boldsymbol{r}_2 = -\frac{2f'' + g''[s_2 + (g' - c)]}{s_2}.$$

因此由假设 (A), 系统 (11.0.1) 严格双曲, 但两个特征场在直线 $v = 0$ 上线性退化.

11.1 推广的弹性力学系统的黏性解

在系统 (11.0.1) 中加上正的抛物扰动项, 考虑方程组

$$\begin{cases} u_t + (cu + f(v))_x = \varepsilon u_{xx}, \\ v_t + (u + g(v))_x = \varepsilon v_{xx} \end{cases} \tag{11.1.1}$$

带光滑初值

$$(u(x,0), v(x,0)) = (u_0^\varepsilon(x), v_0^\varepsilon(x)) = (u_0(x), v_0(x)) * j^\varepsilon \tag{11.1.2}$$

的柯西问题, 有

定理 11.1.1 *如果初值 $(u_0(x), v_0(x))$ 有界可测且条件 (A) 成立, 那么对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 柯西问题 (11.0.3)–(11.0.4) 存在唯一的整体光滑解 $(u^\varepsilon(x,t), v^\varepsilon(x,t))$ 满足*

$$|u^\varepsilon(x,t)| \leqslant M, \quad 0 \leqslant v^\varepsilon(x,t) \leqslant M, \tag{11.1.3}$$

其中, M 为与 ε 无关的正常数.

证明 系统 (11.0.1) 的两个黎曼不变量为

$$w = u + \int_0^v \frac{g' - c + s_2}{2} \mathrm{d}v, \quad z = u + \int_0^v \frac{g' - c - s_2}{2} \mathrm{d}v. \tag{11.1.4}$$

根据黎曼不变量的表达式 (11.1.4) 及条件 (A), 沿着 uOv 平面上的曲线 $w = N$, $w = -N$, $z = N$ 和 $z = -N$, 我们有下述估计:

在曲线 $w = N$ 上, 当 $v > 0$ 时,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = -\frac{g' - c + s_2}{2} < 0,$$
$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}v^2} = -\frac{2f'' + g''(g' - c + s_2)}{2s_2} < 0;$$

在曲线 $w = -N$ 上, 当 $v < 0$ 时,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = -\frac{g' - c + s_2}{2} < 0,$$
$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}v^2} = -\frac{2f'' + g''(g' - c + s_2)}{2s_2} > 0;$$

在曲线 $z=N$ 上, 当 $v<0$ 时,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=-\frac{g'-c-s_2}{2}>0,$$
$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}v^2}=\frac{2f''+g''(g'-c-s_2)}{2s_2}<0;$$

在曲线 $z=-N$ 上, 当 $v>0$ 时,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=-\frac{g'-c-s_2}{2}>0,$$
$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}v^2}=\frac{2f''+g''(g'-c-s_2)}{2s_2}>0.$$

因此

$$\Sigma_0=\left\{(u,v):w\leqslant N,\ w\geqslant -N, z\leqslant N,\ z\geqslant -N\right\}$$

是方程组 (11.1.1) 的一个不变域, 如图 11.1 所示, 其中常数 $N>0$ 只依赖于初值的 L^∞ 范数. 这蕴涵着黏性解的 L^∞ 界估计 (11.1.3) 及其全局存在性. □

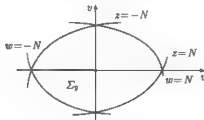


图 11.1　系统 (11.1.1) 的不变域

11.2　推广的弹性力学系统的 Lax 型熵–熵流

与系统 (10.0.1) 相似, (11.0.1) 中的非线性流函数也是隐式的. 我们先构造系统 (11.0.1) 的具有下述特殊形式的熵–熵流:

$$\eta_k^1=\mathrm{e}^{kw}\left(a_1(v)+\frac{b_1(v,k)}{k}\right),\qquad q_k^1=\mathrm{e}^{kw}\left(c_1(v)+\frac{d_1(v,k)}{k}\right),$$
$$\eta_{-k}^2=\mathrm{e}^{-kw}\left(a_2(v)+\frac{b_2(v,k)}{k}\right),\quad q_{-k}^2=\mathrm{e}^{-kw}\left(c_2(v)+\frac{d_2(v,k)}{k}\right),$$
$$\eta_{-k}^1=\mathrm{e}^{-kz}\left(a_3(v)+\frac{b_3(v,k)}{k}\right),\quad q_{-k}^1=\mathrm{e}^{-kz}\left(c_3(v)+\frac{d_3(v,k)}{k}\right),$$
$$\eta_k^2=\mathrm{e}^{kz}\left(a_4(v)+\frac{b_4(v,k)}{k}\right),\qquad q_k^2=\mathrm{e}^{kz}\left(c_4(v)+\frac{d_4(v,k)}{k}\right),$$

其中, w, z 是由 (11.1.4) 给出的系统 (11.0.1) 的两个黎曼不变量.

根据定义, 系统 (11.0.1) 的熵-熵流 (η, q) 满足

$$(c\eta_u + \eta_v, f'\eta_u + g'\eta_v) = (q_u, q_v). \tag{11.2.1}$$

从 (11.2.1) 消去 q 即得熵方程:

$$f'\eta_{uu} + (g' - c)\eta_{uv} - \eta_{vv} = 0. \tag{11.2.2}$$

利用第 10 章介绍的方法, 可由 (11.2.1), (11.2.2) 给出系统 (11.0.1) 的四族 Lax 型熵-熵流:

$$\begin{aligned}
&\eta_k^1 = \mathrm{e}^{kw}\left(a_1(v) + \frac{b_1(v,k)}{k}\right), \quad q_k^1 = \lambda_2\eta_k^1 + \mathrm{e}^{kw}\left(\frac{a_1'}{k} + \frac{b_1'(v,k)}{k^2}\right),\\
&\eta_{-k}^2 = \mathrm{e}^{-kw}\left(a_2(v) + \frac{b_2(v,k)}{k}\right), \quad q_{-k}^2 = \lambda_2\eta_{-k}^2 - \mathrm{e}^{-kw}\left(\frac{a_2'}{k} + \frac{b_2'(v,k)}{k^2}\right),\\
&\eta_k^2 = \mathrm{e}^{kz}\left(a_3(v) + \frac{b_3(v,k)}{k}\right), \quad q_k^2 = \lambda_1\eta_k^2 + \mathrm{e}^{kz}\left(\frac{a_3'}{k} + \frac{b_3'(v,k)}{k^2}\right),\\
&\eta_{-k}^1 = \mathrm{e}^{-kz}\left(a_4(v) + \frac{b_4(v,k)}{k}\right), \quad q_{-k}^1 = \lambda_1\eta_{-k}^1 - \mathrm{e}^{-kz}\left(\frac{a_4'}{k} + \frac{b_4'(v,k)}{k^2}\right),
\end{aligned} \tag{11.2.3}$$

其中, 函数 $a_i(v)$, $b_i(v,k)$ $(i = 1,2,3,4)$ 满足

$$s_2 a_1' + \frac{g''(g' - c + s_2) + 2f''}{2s_2}a_1 = 0, \quad a_2(v) = a_1(v), \tag{11.2.4}$$

$$s_2 a_3' + \frac{g''(g' - c - s_2) + 2f''}{2s_2}a_3 = 0, \quad a_4(v) = a_3(v), \tag{11.2.5}$$

以及

$$a_1'' + s_2 b_1' + \frac{g''(g' - c - s_2) + 2f''}{2s_2}b_1 + \frac{b_1''}{k} = 0, \tag{11.2.6}$$

$$a_2'' - s_2 b_2' - \frac{g''(g' - c + s_2) + 2f''}{2s_2}b_2 + \frac{b_2''}{k} = 0, \tag{11.2.7}$$

$$a_3'' - s_2 b_3' - \frac{g''(g' - c - s_2) + 2f''}{2s_2}b_3 + \frac{b_3''}{k} = 0, \tag{11.2.8}$$

$$a_4'' + s_2 b_4' + \frac{g''(g' - c + s_2) + 2f''}{2s_2}b_4 + \frac{b_4''}{k} = 0. \tag{11.2.9}$$

求解方程 (11.2.4), (11.2.5) 得

$$a_1 = a_2 = \exp\left\{-\int_0^v \frac{g''(g' - c + s_2) + 2f''}{2s_2^2}\mathrm{d}v\right\} > 0, \quad \forall v \in [-M, M],$$

$$a_3 \quad a_4 = \exp\left\{-\int_0^v \frac{g''(g'-c-s_2)+2f''}{2s_2^2}\mathrm{d}v\right\} > 0, \quad \forall v \in [\ \ M, M].$$

对方程 (11.2.6)~(11.2.9) 应用引理 8.6.1 即可得到 $b_i(v,k)$ $(i=1,2,3,4)$ 的存在性及 $b_i(v,k)$, $b_i'(v,k)$ 关于 k 的一致界估计. 此外, 由假设 (A), $a_i'(v)$ $(i=1,2,3,4)$ 只有一个零点 $v=0$.

系统 (11.0.1) 与 (10.0.1) 之间存在一个很大的差别: 系统 (10.0.1) 的熵流中的项 $a_i(v)-va_i'(v)$ $(i=1,2,3,4)$ 恒大于零, 而系统 (11.0.1) 的熵流中与之对应的项 $a_i'(v)$ $(i=1,2,3,4)$ 穿过线性退化直线 $v=0$ 时会改变符号. 从 6.4 节中的证明过程可看出这种线性退化会产生一些新的困难. 尽管二次流系统 (6.0.1) 也线性退化, 但两个特征场共同的退化区域只有一个点 $(u,v)=(0,0)$. 作变量变换 $s=u^2+v^2$, 就能推断从属于系统 (6.0.1) 的黏性解序列的 Young 测度是支撑于另外一点的 Dirac 测度, 假若它不集中于 $s=0$. 但是对于系统 (11.0.1) 来说, 处理直线 $v=0$ 上的测度非常困难. 我们将在 11.3 节介绍一些新的思想来归约 Young 测度.

11.3　推广的弹性力学系统的弱解

本节将用 11.2 节构造的 Lax 型熵-熵流证明 Young 测度是点测度, 从而证得弱解的存在性.

引理 11.3.1　*由式 (11.2.3) 给出的任何熵-熵流 $(\eta(u,v),q(u,v))$ 满足*

$$\eta(u^\varepsilon,v^\varepsilon)_t+q(u^\varepsilon,v^\varepsilon)_x \quad 在\ H^{-1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+) \quad 中紧,$$

其中, $(u^\varepsilon,v^\varepsilon)$ 是柯西问题 (11.1.1) (11.1.2) 的黏性解.

证明　容易验证系统 (11.0.1) 有个严格凸熵

$$\eta^* = \frac{1}{2}u^2+\int_0^v f(s)\mathrm{d}s,$$

所以利用证明引理 10.2.1 的相同方法即可完成本引理的证明. □

定理 11.3.1　*如果条件 (A_1), (A_2) 成立, 那么存在柯西问题 (11.1.1) (11.1.2) 的黏性解的子列 $\{(u^\varepsilon(x,t),v^\varepsilon(x,t))\}$ 使得*

$$(u^\varepsilon(x,t),v^\varepsilon(x,t)) \xrightarrow{\text{a.e.}} (u(x,t),v(x,t)) \quad (\varepsilon\to 0),$$

其中, 极限函数 $(u(x,t),v(x,t))$ 是柯西问题 (11.0.1) (11.0.2) 的弱解.

证明　引理 11.3.1 确保了式 (11.2.3) 中的任何两个熵-熵流 (η^i,q^i) $(i=1,2)$ 满足测度方程

$$\langle\nu,\eta^1\rangle\langle\nu,q^2\rangle-\langle\nu,\eta^2\rangle\langle\nu,q^1\rangle=\langle\nu,\eta^1q^2-\eta^2q^1\rangle. \tag{11.3.1}$$

因为 $a_i(v) > 0$ $(v \in [-M, M])$, 所以

$$\langle \nu, \eta^1_{\pm k} \rangle > 0, \quad \langle \nu, \eta^2_{\pm k} \rangle > 0.$$

设 Q 为 Young 测度 ν 的最小特征矩形:

$$Q = \{(u, v) : w_- \leqslant w \leqslant w_+,\ z_- \leqslant z \leqslant z_+\}.$$

我们介绍四族定义在 Q 上的新概率测度 $\mu_k^\pm$ 与 $\theta_k^\pm$:

$$\begin{aligned}
\langle \mu_k^+, h \rangle &= \langle \nu, h\eta_k^1 \rangle / \langle \nu, \eta_k^1 \rangle, \\
\langle \mu_k^-, h \rangle &= \langle \nu, h\eta_{-k}^2 \rangle / \langle \nu, \eta_{-k}^2 \rangle, \\
\langle \theta_k^+, h \rangle &= \langle \nu, h\eta_k^2 \rangle / \langle \nu, \eta_k^1 \rangle, \\
\langle \theta_k^-, h \rangle &= \langle \nu, h\eta_{-k}^1 \rangle / \langle \nu, \eta_{-k}^2 \rangle,
\end{aligned}$$

其中, $h = h(u, v)$ 是任意的连续函数. 显然 $\mu_k^\pm$ 与 $\theta_k^\pm$ 关于 k 一致有界, 所以根据空间 L^∞ 的弱 $*$ 紧性, 存在 Q 上的概率测度 $\mu^\pm$ 与 $\theta^\pm$ 使得

$$\langle \mu^\pm, h \rangle = \lim_{k \to \infty} \langle \mu_k^\pm, h \rangle, \quad \langle \theta^\pm, h \rangle = \lim_{k \to \infty} \langle \theta_k^\pm, h \rangle$$

分别对 $\{\mu_k^\pm\}$ 与 $\{\theta_k^\pm\}$ 的某个子列成立. 另外, 与式 (6.4.2), (6.4.3) 的证明相似, 有

$$\begin{aligned}
\text{supp } \mu^+ &= Q \cap \{(u, v) : w = w_+\} = I_w^+, \\
\text{supp } \mu^- &= Q \cap \{(u, v) : w = w_-\} = I_w^-, \\
\text{supp } \theta^+ &= Q \cap \{(u, v) : z = z_+\} = I_z^+, \\
\text{supp } \theta^- &= Q \cap \{(u, v) : z = z_-\} = I_z^-.
\end{aligned}$$

利用证明 (6.4.8) 的相同技巧可由测度方程 (11.3.1) 推出

$$\langle \mu^+, q - \lambda_2 \eta \rangle = \langle \mu^-, q - \lambda_2 \eta \rangle \tag{11.3.2}$$

以及

$$\langle \theta^+, q - \lambda_1 \eta \rangle = \langle \theta^-, q - \lambda_1 \eta \rangle \tag{11.3.3}$$

对任何满足 $H_{\mathrm{loc}}^{-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ 紧性的熵-熵流 (η, q) 成立.

现在来归约 Young 测度 ν. 设 $\varGamma$ 为 uOv 平面上的直线 $v = 0$, 即

$$\varGamma \doteq \{(u, v) : v = 0\} = \{(w, z) : w = z\}.$$

第一步: 若两个点 $P^+ = I_w^+ \cap I_z^+$ 与 $P^- = I_w^- \cap I_z^-$ 中有一点不在 $\varGamma$ 上, 则容易推出 Young 测度是 Dirac 测度.

事实上, 对于这种情形, 边界弧 I_w^+, I_w^-, I_z^+, I_z^- 中至少有一条包含于 Γ^c 的连通分支, 在这个开区域内两个特征场真正非线性, 即 $a_i'(v)$ $(i=1,2,3,4)$ 恒不为零. 例如, 设 P^+ 在 Γ^c 中, 则 $I_w^+ \subset \Gamma^c$ 或者 $I_z^+ \subset \Gamma^c$.

不失一般性, 设 $I_w^+ \subset \Gamma^c$, 则可用证得 (6.4.9), (6.4.10) 的相同技巧推出 $w^+ = w^-$, 如果我们在等式 (11.3.2) 中用 (η_k^1, q_k^1) 替换 (η, q). 于是 ν 就集中于直线 $I = I_w^+ = I_w^-$, 而两个特征场在该直线上真正非线性, 所以我们可在等式 (11.3.3) 中用熵 熵流 (η_k^2, q_k^2) 替换 (η, q) 得到 $z^+ = z^-$.

第二步: 设两个点 $P^+ = I_w^+ \cap I_z^+$ 与 $P^- = I_w^- \cap I_z^-$ 都在 Γ 上. 注意到函数 $a_i'(v)$ $(i=1,2)$ 在 I_w^+ 上的限制只有一个零点 P^+, 而 $a_i'(v)$ $(i=1,2)$ 在 I_w^- 的限制只有一个零点 P^-, 所以边界测度 μ^+ 与 μ^- 的支集分别包含在弧 I_w^+ 与 I_w^- 之中, 而 $a_i'(v)$ $(i=1,2)$ 在它们上面定号. 因此, μ^+ 与 μ^- 是分别集中于 P^+ 与 P^- 的 Dirac 测度.

事实上, 如果除了 P^+ 之外, 测度 μ^+ 的支集还含有 I_w^+ 中的另外一点, 那么我们可再次在等式 (11.3.2) 中用 (η_k^1, q_k^1) 替换 (η, q) 推出 $w^+ = w^-$, 从而 $P^+ = P^-$. 这不可能.

同理可证 θ^+ 与 θ^- 也是分别集中于 P^+ 与 P^- 的 Dirac 测度. 因此,

$$\operatorname{supp} \mu^+ = \operatorname{supp} \theta^+ = \{P^+\}, \quad \operatorname{supp} \mu^- = \operatorname{supp} \theta^- = \{P^-\},$$

因而由等式 (11.3.2), (11.3.3), 对任何满足 H_{loc}^{-1} 紧性的熵 熵流 (η, q) 有

$$q(P^+) - \lambda_i(P^+)\eta(P^+) = q(P^-) - \lambda_i(P^-)\eta(P^-), \quad i = 1, 2.$$

令 $P^+ = (u^+, 0)$, $P^- = (u^-, 0)$, 则选取 $(\eta, q) = (v, u + g(v))$ 即得

$$u^+ + g(0) = u^- + g(0),$$

即 $u^+ = u^-$, 所以 Young 测度 ν 是 Dirac 测度.

根据定理 2.1.2, 存在柯西问题 (11.1.1)–(11.1.2) 的黏性解的子列 $\{(u^\varepsilon(x,t), v^\varepsilon(x,t))\}$ 使得

$$(u^\varepsilon(x,t), v^\varepsilon(x,t)) \xrightarrow{\text{a.e.}} (u(x,t), v(x,t)) \quad (\varepsilon \to 0),$$

其中, 极限函数 $(u(x,t), v(x,t))$ 是柯西问题 (11.0.1)–(11.0.2) 的弱解. 证毕. □

评　注

对于弹性力学系统即系统 (11.0.1) 中 $g(v) = c = 0$ 的情形, DiPerna[75] 最先建立了柯西问题 (11.0.1)–(11.0.2) 的大初值整体 L^∞ 弱解的存在性定理, 这也是补偿

列紧方法第一次在由两个方程组成的双曲系统中的应用. 在 DiPerna 的原创性论文中, 利用 Lax 型熵-熵流把 Young 测度归结为点测度的这一思想最早就是应用于这个严格双曲的弹性力学系统. 本章对于更为一般的系统 (11.0.1) 的弱解存在性的证明选自论文 [74].

第 12 章　弹性力学系统的 L^p 解

本章主要讨论拉格朗日坐标系下的一维非线性弹性力学系统

$$\begin{cases} u_t + f(v)_x = 0, \\ v_t + u_x = 0 \end{cases} \tag{12.0.1}$$

带可测初值

$$(u(x,0), v(x,0)) = (u_0(x), v_0(x)) \tag{12.0.2}$$

的柯西问题 L^p 弱解的存在性, 其中 v 表示拉力, $f(v)$ 是压力, u 表示速度. 关于非线性流函数 $f(v)$ 的两个基本假设是

(a) $f'(v) \geqslant c > 0$;

(b) $v \cdot f''(v) > 0 \quad (\forall v \neq 0)$.

条件 (a) 确保了系统的双曲性, 到目前为止, 弹性力学系统的所有存在性结果都离不开这个本质要求; 条件 (b) 确保系统只在直线 $v = 0$ 上线性退化和解有 L^∞ 界, 这使得熵-熵流的构造和 Young 测度的归约非常容易. 然而, 如果条件 (b) 不成立, 在这种情形下, 最简单的情况是 $f(v)$ 的二阶导数仍然只有一个零点, 即 $v \cdot f''(v) < 0$ $(v \neq 0)$, 那么系统不再有解的 L^∞ 界估计, 尽管它还是只在同一条直线 $v = 0$ 上线性退化. 此时, 我们只能得到解的先验 L^p $(1 < p < \infty)$ 估计 (见文献 [76]).

如第 3 章所述, 对于标量方程, 我们容易把补偿列紧方法从 L^∞ 空间推广到 L^p 空间, 因为任何光滑函数都是标量方程的熵. 但是, 对于由两个或更多方程组成的双曲系统, 在 L^p 空间应用补偿列紧方法有许多困难. 例如, 如何构造适当的熵-熵流 (η, q) 使得 $\eta(s^l(x,t))_t + q(s^l(x,t))_x$ 关于黏性解 s^l 在 $W^{-1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ 中紧; 如何把相应的具有无界支集的 Young 测度归结为点测度等. 无论从数学上讲还是物理学上讲, 双曲系统的 L^p 解的存在性问题是非常重要的. 遗憾的是, 迄今为止, 只有上述物理模型——弹性力学系统的 L^p 解的存在性得到证明. 关于一些数学系统的 L^p 解的研究请参阅文献 [77, 78].

有趣的是, 几乎同时, Lin[8] 和 Shearer[79] 独立地对弹性力学系统 L^p 解的存在性给出两个不同的证明. 本章我们将介绍这些证明以及文献 [79] 中的思想在由二个方程组成的推广的弹性力学系统中的应用.

12.1 人工黏性逼近和 L^p 解

本节将介绍柯西问题 (12.0.1) (12.0.2) L^p 的弱解存在性的一个证明, 它由 Lin 应用补偿列紧方法和人工黏性逼近相结合的思想得到.

系统 (12.0.1) 的人工黏性逼近解满足下述奇异抛物型方程组:

$$\begin{cases} u_t + f(v)_x = \varepsilon u_{xx}, \\ v_t + u_x = \varepsilon v_{xx} \end{cases} \tag{12.1.1}$$

带初值 (12.0.2) 的柯西问题.

需要下列基本假设:

(H_1) 存在正常数 σ_0, M 使得

$$f(v) \in C^4(\mathbb{R}), \quad \left|\frac{\mathrm{d}^k f(v)}{\mathrm{d}v^k}\right| \leqslant \sigma_0 \quad (v \in \mathbb{R},\ k = 2,3,4),$$

并且 $(f'(v))^{-\frac{1}{4}}$ 在 $v \geqslant M$ 上上凹而在 $v \leqslant -M$ 上下凸;

(H_2) 存在常数 $c > 0$ 使得 $f'(v) \geqslant c\ (v \in \mathbb{R})$;

(H_3) $v \cdot f''(v) < 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$;

(H_4) 存在实数 $\bar{u}$, $\bar{v}$, w^0, z^0 $(w^0 > z^0)$ 使得

$$u_0(x) - \bar{u} \in L^2(\mathbb{R}), \quad v_0(x) - \bar{v} \in L^2(\mathbb{R}),$$

$$w(u_0(x), v_0(x)) \geqslant w^0, \quad z(u_0(x), v_0(x)) \leqslant z^0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

其中, w 和 z 是系统 (12.0.1) 的两个黎曼不变量:

$$w(u,v) = u + \int_0^v \sqrt{f'(s)}\mathrm{d}s, \quad z(u,v) = u - \int_0^v \sqrt{f'(s)}\mathrm{d}s.$$

定理 12.1.1 (Lin, [8]) *设 $(H_1) \sim (H_4)$ 成立, 则对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 柯西问题 (12.1.1)-(12.0.2) 的整体光滑解 $(u^\varepsilon(x,t), v^\varepsilon(x,t))$ 存在; 而且存在黏性解的子列 $\{(u^\varepsilon(x,t), v^\varepsilon(x,t))\}$ 和 $u(x,t)$, $v(x,t) \in L^\infty([0,\infty), L^2(\mathbb{R}))$ 使得*

$$(u^\varepsilon(x,t), v^\varepsilon(x,t)) \xrightarrow{\text{a.e.}} (u(x,t), v(x,t)) \quad (\varepsilon \to 0), \tag{12.1.2}$$

其中, 极限函数 $(u(x,t), v(x,t))$ 是柯西问题 (12.0.1) (12.0.2) 的弱解.

证明框架 首先, 利用不变域理论可以证明

$$w(u^\varepsilon(x,t), v^\varepsilon(x,t)) \geqslant w^0 > z^0 \geqslant z(u^\varepsilon(x,t), v^\varepsilon(x,t)). \tag{12.1.3}$$

然后, 可以构造四族 Lax 型熵–熵流

$$\eta_{\pm k}(w,z)=\mathrm{e}^{\pm kz}(A_0+A_1(\pm k)^{-1})+P_{\pm k},$$

$$q_{\pm k}(w,z)=\mathrm{e}^{\pm kz}(B_0+B_1(\pm k)^{-1})+Q_{\pm k},$$

$$\bar{\eta}_{\pm k}(w,z)=\mathrm{e}^{\pm kw}(a_0+a_1(\pm k)^{-1})+p_{\pm k},$$

$$\bar{q}_{\pm k}(w,z)=\mathrm{e}^{\pm kw}(b_0+b_1(\pm k)^{-1})+q_{\pm k},$$

其中, 光滑函数 $A_0(w,z)$, $A_1(w,z)$, $B_0(w,z)$, $B_1(w,z)$ 关于变量 z 具有紧支集 $[z^-,z^+]$, z^- 与 z^+ 是常数, $z^+<w^0$; 光滑函数 $a_0(w,z)$, $a_1(w,z)$, $b_0(w,z)$, $b_1(w,z)$ 关于变量 w 具有紧支集 $[w^-,w^+]$, w^- 与 w^+ 是常数, $w^->z^0$. 此外函数 $P_{\pm k}(w,z)$, $Q_{\pm k}(w,z)$, $p_{\pm k}(w,z)$, $q_{\pm k}(w,z)$ 都有适当的界使得熵 η 及其相应的熵流 q 满足

$$\begin{aligned}&|\nabla^2\eta|\leqslant C,\quad |\nabla\eta|\leqslant C(1+|u|^\alpha+|v|^\alpha),\\&|\eta|\leqslant C(1+|u|^\alpha+|v|^\alpha),\quad |q|\leqslant C(1+|u|^\alpha+|v|^\alpha),\end{aligned}\tag{12.1.4}$$

其中, 指数 $0<\alpha<1$, C 为正常数.

注意到系统 (12.0.1) 有个严格凸熵

$$\eta^*=\frac{1}{2}u^2+\int_0^v f(v)\mathrm{d}v$$

及相应的熵流 $q^*=uf(v)$, 所以

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}}\partial_x u^\varepsilon,\ \varepsilon^{\frac{1}{2}}\partial_x v^\varepsilon \text{ 在 } L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+) \text{ 中有界.}$$

利用熵–熵流的增长性条件 (12.1.4), 可由定理 2.3.1 证得 $\eta(u^\varepsilon,v^\varepsilon)_t+q(u^\varepsilon,v^\varepsilon)_x$ 关于人工黏性逼近解 $(u^\varepsilon(x,t),v^\varepsilon(x,t))$ 在 $W^{-1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中紧.

最后, 应用 DiPerna 就 L^∞ 空间给出的一些基本思想结合这些熵–熵流, 并经过复杂的分析就可把 Young 测度归结为点测度, 从而得到黏性解序列的紧性 (12.1.2) 以及 L^p 弱解的存在性. □

关于定理 12.1.1 的详细证明与评注请读者参阅文献 [8].

12.2 物理黏性逼近和 L^p 解

如同 12.1 节描述的那样, 在定理 12.1.1 的证明中, 一个基本的技术性约束是人工黏性解满足不变域性质 (12.1.3), 这让我们自然使用人工黏性逼近 (12.1.1).

然而, 作为物理模型, 弹性力学系统 (12.0.1) 的下述物理黏性逼近:

$$
\begin{cases}
u_t + f(v)_x = \varepsilon u_{xx}, \\
v_t + u_x = 0
\end{cases}
\tag{12.2.1}
$$

更为有趣. 一般说来, 物理黏性逼近解不再满足 (12.1.3).

几乎与 Lin 给出证明的同时, Shearer[79] 也应用人工黏性逼近独立地得到了弹性力学系统 (12.0.1) 的 L^p 解, 但他使用了不同的熵–熵流. 后来, 这一方法被 Serre 和 Shearer 推广而用来研究物理黏性逼近解的紧性.

大体上说, Shearer 构造了系统 (12.0.1) 的两类熵–熵流: 一类是 Fourier 熵, 另一类是支撑于半平面的熵. 这两类熵–熵流 (η, q) 具有估计:

$$
\begin{cases}
\eta(u,v) = (f'(v))^{-\frac{1}{4}} O(1), \quad q(u,v) = (f'(v))^{\frac{1}{4}} O(1), \\
\eta_u(u,v) = (f'(v))^{-\frac{1}{4}} O(1), \quad \eta_v(u,v) = (f'(v))^{\frac{1}{4}} O(1), \\
\eta_{uu}(u,v) = (f'(v))^{-\frac{1}{4}} O(1), \quad \eta_{uv}(u,v) = (f'(v))^{\frac{1}{4}} O(1), \\
\eta_{vv}(u,v) = (f'(v))^{\frac{3}{4}} O(1),
\end{cases}
\tag{12.2.2}
$$

其中, $O(1)$ 表示有界函数.

定理 12.2.1(Shearer, [79]) *设 $f'(v) \geqslant c > 0$, $f''(v) \neq 0$ 并且 $f''(v) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, $f'''(v) \in L^\infty(\mathbb{R})$, 则存在柯西问题 (12.1.1)–(12.0.2) 的人工黏性解的子列 $\{(u^\varepsilon(x,t), v^\varepsilon(x,t))\}$ 和 $u(x,t)$, $v(x,t) \in L^\infty([0,\infty), L^2(\mathbb{R}))$ 使得*

$$
(u^\varepsilon(x,t), v^\varepsilon(x,t)) \xrightarrow{\text{a.e.}} (u(x,t), v(x,t)) \quad (\varepsilon \to 0),
$$

其中, 极限函数 $(u(x,t), v(x,t))$ 是柯西问题 (12.0.1)–(12.0.2) 的弱解.

注 12.2.1 *定理 12.2.1 的存在性结果与定理 12.1.1 几乎相同, 但由 Shearer 构造的两类熵有更大的灵活性, 可用来研究下列更困难的问题:*

(1) 柯西问题 (12.2.1)–(12.0.2) 的物理黏性解的紧性;

(2) 由三个守恒律方程组成的通过多孔介质的绝热气体流系统 (12.3.1) 的整体 L^p 弱解的存在性;

(3) 由多个方程组成的双曲系统的松弛问题.

Shearer 的证明方法在注 12.2.1 里的 (2), (3) 中的应用分别在 12.3 节和第 16 章给出. 下面介绍这一方法在 (1) 中的应用.

考虑物理黏性逼近, 即奇异扰动系统 (12.2.1) 带初值 (12.0.2) 的柯西问题, 我们有下述由 Serre 和 Shearer 建立的定理:

定理 12.2.2　设 $f'(v) \geqslant c > 0$, $v \cdot f''(v) < 0$ $(v \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$, 并且 $f''(v) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, $f'''(v) \in L^\infty(\mathbb{R})$, 则存在柯西问题 (12.2.1)-(12.0.2) 的黏性解的子列 $\{(u^\varepsilon(x,t), v^\varepsilon(x,t))\}$ 和 $u(x,t)$, $v(x,t) \in L^\infty([0,\infty), L^2(\mathbb{R}))$ 使得

$$(u^\varepsilon(x,t), v^\varepsilon(x,t)) \xrightarrow{\text{a.e.}} (u(x,t), v(x,t)) \quad (\varepsilon \to 0),$$

其中, 极限函数 $(u(x,t), v(x,t))$ 是柯西问题 (12.0.1) (12.0.2) 的弱解.

12.3　绝热气体流系统

本节讨论由三个方程组成的非线性双曲系统:

$$\begin{cases} v_t - u_x = 0, \\ u_t - \sigma(v,s)_x + \alpha u = 0, \\ s_t = 0 \end{cases} \tag{12.3.1}$$

带 L^2 有界初值

$$(v(x,0), u(x,0), s(x,0)) = (v_0(x), u_0(x), s_0(x)) \tag{12.3.2}$$

的柯西问题的弱解存在性, 其中 $\alpha \geqslant 0$ 是常数. 系统 (12.3.1) 可作为通过多孔介质的绝热气体流的模型, 其中 v 是比容, u, s 与 σ 分别表示速度、熵以及压强. 它在欧拉坐标系下的形式可作为管道中等温的不稳定二相流的模型 (见文献 [80]).

在处理柯西问题 (12.3.1)-(12.3.2) 的过程中, 一个基本的困难就是如何在适当的 L^p $(p > 1)$ 空间中得到 $(v^\varepsilon(x,t), u^\varepsilon(x,t), s^\varepsilon(x,t))$ 的与 ε 无关的先验界估计, 其中 $(v^\varepsilon(x,t), u^\varepsilon(x,t), s^\varepsilon(x,t))$ 是下述抛物型方程组:

$$\begin{cases} v_t - u_x = \varepsilon v_{xx}, \\ u_t - \sigma(v,s)_x + \alpha u = \varepsilon u_{xx}, \\ s_t = \varepsilon s_{xx} \end{cases} \tag{12.3.3}$$

带光滑初值

$$(v(x,0), u(x,0), s(x,0)) = (v_0^\varepsilon(x), u_0^\varepsilon(x), s_0^\varepsilon(x)) \tag{12.3.4}$$

的柯西问题的黏性解.

一般而言, 系统 (12.3.1) 不能用黎曼不变量方法把它对角化, 所以不能期望应用不变域原理得到黏性解 $(v^\varepsilon(x,t), u^\varepsilon(x,t), s^\varepsilon(x,t))$ 关于 ε 的一致 L^∞ 界. 因此只能寻找系统 (12.3.1) 的 L^p 解. 从某种意义上讲, 容易得到柯西问题 (12.3.3) (12.3.4)

的解在 L^2 空间中的先验估计, 如果我们能够发现系统 (12.3.1) 的一个严格凸熵. 但是, 应用补偿列紧方法研究黏性解在 L^p 空间中的紧性时, 一个新的困难将会产生. Shearer 的工作提供了处理由三个守恒律组成的系统 (12.3.1) 的理想框架.

本节将应用补偿列紧方法结合 Shearer 构造的熵-熵流研究柯西问题 (12.3.1)-(12.3.2) 的整体广义解.

我们先对非线性函数 $\sigma(v,s)$ 和初值作如下假设:

(1) $\sigma(v,s)=\sigma(v)g(s)-cs$, 其中 $g(s)\in C^3(\mathbb{R})$, $g(s)>0$, $\sigma(v)$ 满足

(a) $\sigma(v)\in C^3(\mathbb{R})$, $\sigma(0)=0$, $\sigma'(v)\geqslant d>c^2$, 其中 d 是常数;

(b) $\sigma''(0)=0$, $\sigma''(v)\neq 0\ (v\neq 0)$;

(c) $\sigma''(v)$, $\sigma'''(v)\in L^2(\mathbb{R})\cap L^\infty(\mathbb{R})$.

(2) $(v_0(x),u_0(x),s_0(x))$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中有界, 并且当 $|x|\to\infty$ 时趋于零的速度充分快使得

$$\lim_{|x|\to\infty}(v_0^\varepsilon(x),u_0^\varepsilon(x),s_0^\varepsilon(x))=(0,0,0),$$

$$\lim_{|x|\to\infty}\left(\frac{\mathrm{d}v_0^\varepsilon(x)}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}u_0^\varepsilon(x)}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}s_0^\varepsilon(x)}{\mathrm{d}x}\right)=(0,0,0),$$

其中

$$(v_0^\varepsilon(x),u_0^\varepsilon(x),s_0^\varepsilon(x))=(v_0(x),u_0(x),s_0(x))*j^\varepsilon$$

满足

$$(v_0^\varepsilon(x),u_0^\varepsilon(x),s_0^\varepsilon(x))\xrightarrow{\text{a.e.}}(v_0(x),u_0(x),s_0(x))\quad(\varepsilon\to 0),$$

$$\|v_0^\varepsilon(x)\|_{L^2(\mathbb{R})}\leqslant\|v_0(x)\|_{L^2(\mathbb{R})}\leqslant M,\quad \|v_0^\varepsilon(x)\|_{H^1(\mathbb{R})}\leqslant M(\varepsilon),$$

$$\|u_0^\varepsilon(x)\|_{L^2}\leqslant\|u_0(x)\|_{L^2(\mathbb{R})}\leqslant M,\quad \|u_0^\varepsilon(x)\|_{H^1(\mathbb{R})}\leqslant M(\varepsilon),$$

$$\|s_0^\varepsilon(x)\|_{L^2(\mathbb{R})}\leqslant\|s_0(x)\|_{L^2(\mathbb{R})}\leqslant M,$$

$$\|s_0^\varepsilon(x)\|_{H^1(\mathbb{R})}\leqslant\|s_0(x)\|_{H^1(\mathbb{R})}\leqslant M$$

以及

$$\left\|\frac{\mathrm{d}^i v_0^\varepsilon(x)}{\mathrm{d}x^i}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})},\quad \left\|\frac{\mathrm{d}^i u_0^\varepsilon(x)}{\mathrm{d}x^i}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})},\quad \left\|\frac{\mathrm{d}^i s_0^\varepsilon(x)}{\mathrm{d}x^i}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\leqslant M(\varepsilon),\quad i=0,1,2,$$

其中, 常数 $M>0$ 与 ε 无关, $M(\varepsilon)>0$ 与 ε 有关.

定理 12.3.1 *设条件 (1), (2) 成立, 则对任意给定的 $\varepsilon>0$, 柯西问题 (12.3.3)-(12.3.4) 的黏性解 $(v^\varepsilon,u^\varepsilon,s^\varepsilon)$ 全局存在且满足*

$$\|v^\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})},\quad \|u^\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})},\quad \|s^\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^1(\mathbb{R})}\leqslant M;$$

而且存在黏性解的子列 $\{(v^\varepsilon, u^\varepsilon, s^\varepsilon)\}$ 使得

$$(v^\varepsilon, u^\varepsilon, s^\varepsilon) \xrightarrow{\text{a.e.}} (v, u, s) \quad (\varepsilon \to 0),$$

其中, 极限函数 (v, u, s) 在 $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ 中有界且是柯西问题 (12.3.1) (12.3.2) 的弱解.

证明 为了证明黏性解 $(v^\varepsilon, u^\varepsilon, s^\varepsilon)$ 的存在性, 只需得到下述 L^∞ 估计:

$$\|v^\varepsilon\|_{L^\infty} \leqslant M(\varepsilon, T), \quad \|u^\varepsilon\|_{L^\infty} \leqslant M(\varepsilon, T), \quad \|s^\varepsilon\|_{L^\infty} \leqslant M(\varepsilon, T), \tag{12.3.5}$$

尽管界 $M(\varepsilon, T)$ 可能会因 $\varepsilon \to 0$ 或时间 $T \to \infty$ 而趋于无穷.

分别用 $\sigma(v)g(s) - cs$, u, $g'(s)\int_0^v \sigma(v)\mathrm{d}v - cv + \gamma s$ 乘方程组 (12.3.3) 中的第一、二、三个方程, 然后把得到的结果相加, 我们有

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{u^2}{2} + \int_0^v \sigma(v)\mathrm{d}v g(s) - csv + \frac{\gamma s^2}{2}\right)_t \\
&+(csu - \sigma(v)g(s)u)_x + \alpha u^2 \\
=&\ \varepsilon\left(\frac{u^2}{2} + \int_0^v \sigma(v)\mathrm{d}v g(s) - csv + \frac{\gamma s^2}{2}\right)_{xx} \\
&-\varepsilon\Big(\sigma'(v)g(s)v_x^2 + 2(\sigma(v)g'(s) - c)s_x v_x + u_x^2 \\
&+\int_0^v \sigma(v)\mathrm{d}v g''(s)s_x^2 + \gamma s_x^2\Big),
\end{aligned} \tag{12.3.6}$$

其中, γ 是足够大的正常数.

利用假设 $\|s_0(x)\|_{H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})} \leqslant M$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} s_0(x) = 0$, 并注意到

$$s_0^2(x) - \int_{-\infty}^x (s_0^2)'(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{-\infty}^x s_0^2(x)\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^x s_0'^2(x)\mathrm{d}x,$$

我们就得到 $s_0(x)$ 在 $L^\infty(\mathbb{R})$ 中的有界性. 所以函数 $s_0^\varepsilon(x)$ 满足

$$\|s_0^\varepsilon(x)\|_{L^\infty} \leqslant M, \quad \|\varepsilon^{\frac{1}{2}} s_{0x}^\varepsilon(x)\|_{L^\infty} \leqslant M, \quad \|\varepsilon s_{0xx}^\varepsilon(x)\|_{L^\infty} \leqslant M,$$

因而由方程组 (12.3.3) 中的第三个方程可得到

$$\left\{\begin{array}{ll}
\|s^\varepsilon(x,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant M, & \|\varepsilon^{\frac{1}{2}} s_x^\varepsilon(x,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant M, \\
\|\varepsilon s_{xx}^\varepsilon(x,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant M, & \|s^\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})} \leqslant M.
\end{array}\right. \tag{12.3.7}$$

于是 $g(s)$, $g'(s)$ 与 $g''(s)$ 都有界, 且 $g(s) \geqslant \delta > 0$, 其中 δ 是常数.

因为 $\left|\int_0^v \sigma(v)\mathrm{d}v\right| \leqslant Mv^2$, 所以等式 (12.3.6) 的两端在 $\mathbb{R}\times[0,T]$ 上积分有

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{u^2}{2}+\int_0^v \sigma(v)\mathrm{d}vg(s)-csv+\frac{\gamma s^2}{2}\right)\mathrm{d}x \\
&+\varepsilon\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty} c_1v_x^2+u_x^2+c_2s_x^2+\alpha u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
\leqslant &\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{u_0^2}{2}+\int_0^{v_0} \sigma(v)\mathrm{d}vg(s_0)-cs_0v_0+\frac{\gamma s_0^2}{2}\right)\mathrm{d}x \\
&+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty} Mv^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant M_1+M_2\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty} v^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t,
\end{aligned} \tag{12.3.8}$$

其中, c_1, c_2, M_1, M_2 和 M 是适当的正常数.

由于

$$\int_0^v \sigma(v)\mathrm{d}vg(s)-csv+\frac{\gamma s^2}{2} \geqslant c_3(v^2+s^2)$$

对充分小的正常数 c_3 成立, 所以应用 Gronwall 不等式, 由式 (12.3.8) 即得

$$\int_{-\infty}^{\infty} v^2\mathrm{d}x \leqslant M(T),\quad \int_{-\infty}^{\infty} u^2\mathrm{d}x \leqslant M(T),\quad \int_{-\infty}^{\infty} s^2\mathrm{d}x \leqslant M(T), \tag{12.3.9}$$

以及

$$\varepsilon\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(v_x^2+u_x^2+s_x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant M(T). \tag{12.3.10}$$

把方程组 (12.3.3) 中第一个方程的两端对 x 求导, 然后把得到的结果乘以 $2v_x$ 有

$$(v_x)^2-2(v_xu_x)_x+2u_xv_{xx}+2\varepsilon v_{xx}^2=\varepsilon(v_x^2)_{xx}. \tag{12.3.11}$$

式 (12.3.11) 两端在 $\mathbb{R}\times[0,T]$ 上积分得

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_x^2\mathrm{d}x+\int_0^T\int_{\infty}^{\infty}\varepsilon v_{xx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant M(\varepsilon,T).$$

同理可证

$$\int_{-\infty}^{\infty}(u_x^2+s_x^2)\mathrm{d}x+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon(u_{xx}^2+s_{xx}^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant M(\varepsilon,T).$$

由此即得估计 (12.3.5) 及黏性解的存在性. 例如,

$$v^2=\int_{-\infty}^{x}(v^2)_x\mathrm{d}x \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} v^2\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{\infty} v_x^2\mathrm{d}x \leqslant M(\varepsilon,T).$$

为了证明定理 12.3.1 中弱解的存在性, 我们暂时固定 s 而把它视为常数, 然后构造下述系统:

$$\begin{cases} v_t - u_x = 0, \\ u_t - (g(s)\sigma(v))_x = 0 \end{cases} \tag{12.3.12}$$

的熵-熵流. 作变换

$$x = \sqrt{g(s)}y, \quad t = t, \quad v = v, \quad u = \sqrt{g(s)}w,$$

则系统 (12.3.12) 简化为

$$\begin{cases} v_t - w_y = 0, \\ w_t - \sigma(v)_y = 0. \end{cases} \tag{12.3.13}$$

所以由 Shearer 的方法可构造系统 (12.3.13) 的两类熵-熵流 $(\bar{\eta}(v,w), \bar{q}(v,w))$, 一类是 Fourier 熵, 另一类是支撑于半平面的熵. 这两类熵都满足式 (12.2.2) 中的估计. 令

$$\begin{aligned} (\eta(v,u,s), q(v,u,s)) =& (\bar{\eta}(v,w), \bar{q}(v,w)) \\ =& \left(\bar{\eta}\left(v, \frac{u}{\sqrt{g(s)}}\right), \bar{q}\left(v, \frac{u}{\sqrt{g(s)}}\right)\right), \end{aligned}$$

则它们满足

$$\begin{cases} \eta(v,u,s) = (\sigma'(v))^{-\frac{1}{4}}O(1), \quad q(v,u,s) = (\sigma'(v))^{\frac{1}{4}}O(1), \\ \eta_u(v,u,s) = (\sigma'(v))^{-\frac{1}{4}}O(1), \quad \eta_v(v,u,s) = (\sigma'(v))^{\frac{1}{4}}O(1), \end{cases} \tag{12.3.14}$$

以及

$$\begin{cases} \eta_{uu}(v,u,s) = (\sigma'(v))^{-\frac{1}{4}}O(1), \\ \eta_{vu}(v,u,s) = (\sigma'(v))^{\frac{1}{4}}O(1), \\ \eta_{vv}(v,u,s) = (\sigma'(v))^{\frac{3}{4}}O(1), \end{cases}$$

其中, $O(1)$ 表示有界函数. 由于

$$(q_v, \bar{q}_w) = (-\sigma'(v)\bar{\eta}_w, -\bar{\eta}_v),$$

所以把 s 作为变量有

$$\begin{cases} q_v(v,u,s) = -\sigma'(v)\sqrt{g(s)}\eta_u(v,u,s), \\ q_u(v,u,s) = -\dfrac{1}{\sqrt{g(s)}}\eta_v(v,u,s), \\ \eta_s(v,u,s) = \bar{\eta}_w\dfrac{\partial w}{\partial s} = \bar{\eta}_w u\left(\dfrac{1}{\sqrt{g(s)}}\right)' = -\dfrac{ug'(s)}{g(s)}\eta_u(v,u,s), \\ q_s(v,u,s) = -\dfrac{ug'(s)}{g(s)}q_u(v,u,s). \end{cases} \tag{12.3.15}$$

用 (η_v,η_u,η_s) 乘方程组 (12.3.3), 并利用 (12.3.15), 有

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon\eta_v v_{xx}+\varepsilon\eta_u u_{xx}+\varepsilon\eta_s s_{xx}\\
&=\eta_v v_t+\eta_u u_t+\eta_s s_t-\eta_v u_x-\eta_u(g(s)\sigma(v))_x+c\eta_u s_x+\alpha u\eta_u\\
&=\eta_t+q_u\sqrt{g(s)}u_x+c\eta_u s_x+\alpha u\eta_u\\
&\quad+\eta_u\big(g(s)\sigma'(v)v_x+\sigma(v)g'(s)s_x\big)\\
&=\eta_t+\sqrt{g(s)}(q_u u_x+q_v v_x)-\sigma(v)g'(s)\eta_u s_x+c\eta_u s_x+\alpha u\eta_u\\
&=\eta_t+(\sqrt{g(s)}q)_x-\sqrt{g(s)}q_s s_x-(\sqrt{g(s)})_x q\\
&\quad-\sigma(v)g'(s)\eta_u s_x+c\eta_u s_x+\alpha u\eta_u.
\end{aligned}
\tag{12.3.16}
$$

另一方面, 有

$$
\begin{aligned}
\varepsilon\eta_v v_{xx}+\varepsilon\eta_u u_{xx}+\varepsilon\eta_s s_{xx}=&\ \varepsilon(\eta_v v_x)_x+\varepsilon(\eta_u u_x)_x+\varepsilon(\eta_s s_x)_x\\
&-\varepsilon\big(\eta_{vv}v_x^2+\eta_{uu}u_x^2+\eta_{ss}s_x^2\big)\\
&-\varepsilon\big(2\eta_{vu}v_x u_x+2\eta_{vs}v_x s_x+2\eta_{us}u_x s_x\big).
\end{aligned}
\tag{12.3.17}
$$

从 (12.3.7), (12.3.9), (12.3.10) 可推出

$$
\|\sigma(v)g'(s)\eta_u s_x\|_{L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)}\leqslant M\|v\|_{L^2_{\rm loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)}\|s_x\|_{L^2_{\rm loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)}\leqslant M(T),
$$

$$
\varepsilon\|\eta_{ss}s_x^2\|_{L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)}\leqslant \varepsilon M\|u^2 s_x^2\|_{L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)}\leqslant M_1\|u^2\|_{L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)}\leqslant M(T)
$$

以及

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon\|\eta_{vs}v_x s_x+\eta_{us}u_x s_x\|_{L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)}\\
&\leqslant\varepsilon M\big(\|uv_x s_x\|_{L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)}+\|us_x u_x\|_{L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)}\big)\\
&\leqslant M_1\big(\|u^2\|_{L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)}+\varepsilon\|v_x^2\|_{L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)}+\varepsilon\|u_x^2\|_{L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)}\big)\\
&\leqslant M(T).
\end{aligned}
$$

因此由等式 (12.3.16), (12.3.17), 有

$$
\eta_t(v,u,s)+(\sqrt{g(s)}q(v,u,s))_x=I_1+I_2,
$$

其中

$$
I_1=\varepsilon(\eta_v v_x)_x+\varepsilon(\eta_u u_x)_x+\varepsilon(\eta_s s_x)_x \text{ 在 } H^{-1}_{\rm loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+) \text{ 中紧},
$$

$$
\begin{aligned}
I_2 = &(\sqrt{g(s)})_x q + \sqrt{g(s)} q_s s_x + \sigma(v) g'(s) \eta_u s_x \\
&c\eta_u s_x \quad \alpha u \eta_u - \varepsilon\big(\eta_{vv} v_x^2 + \eta_{uu} u_x^2 + \eta_{ss} s_x^2\big) \\
&-\varepsilon\big(2\eta_{vu} v_x u_x + 2\eta_{vs} v_x s_x + 2\eta_{us} u_x s_x\big)
\end{aligned}
$$

在 $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中有界从而对于某个指数 $k \in (1,2)$ 在 $W^{-1,k}_{\text{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中紧. 另外, 由式 (12.3.14) 中的估计, $\eta_t(v,u,s) + (\sqrt{g(s)}q(v,u,s))_x$ 在 ${W_{\text{loc}}}^{1,p}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ $(p>2)$ 中有界, 所以根据定理 2.3.1, $\eta_t(v,u,s) + (\sqrt{g(s)}q(v,u,s))_x$ 在 ${H_{\text{loc}}}^{1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中紧.

从式 (12.3.7) 可推出 $\{s^\varepsilon(x,t)\}$ 的点点收敛性, 所以从属于黏性解序列 $\{(v^\varepsilon(x,t), u^\varepsilon(x,t), s^\varepsilon(x,t))\}$ 的 Young 测度 ν 的支集被归约到 vOu 平面, 并且上面给出的任何熵-熵流 $(\eta_i(v,u,s), q_i(v,u,s))$ $(i=1,2)$ 都满足测度方程

$$
\begin{aligned}
&\langle \nu, \eta_1(v^\varepsilon,u^\varepsilon,s)\sqrt{g(s)}q_2(v^\varepsilon,u^\varepsilon,s) - \eta_2(v^\varepsilon,u^\varepsilon,s)\sqrt{g(s)}q_1(v^\varepsilon,u^\varepsilon,s)\rangle \\
=&\langle \nu, \eta_1(v^\varepsilon,u^\varepsilon,s)\rangle\langle \nu, \sqrt{g(s)}q_2(v^\varepsilon,u^\varepsilon,s)\rangle \\
&-\langle \nu, \eta_2(v^\varepsilon,u^\varepsilon,s)\rangle\langle \nu, \sqrt{g(s)}q_1(v^\varepsilon,u^\varepsilon,s)\rangle,
\end{aligned}
$$

即

$$
\begin{aligned}
&\langle \nu, \eta_1(v^\varepsilon,u^\varepsilon,s)q_2(v^\varepsilon,u^\varepsilon,s) - \eta_2(v^\varepsilon,u^\varepsilon,s)q_1(v^\varepsilon,u^\varepsilon,s)\rangle \\
=&\langle \nu, \eta_1(v^\varepsilon,u^\varepsilon,s)\rangle\langle \nu, q_2(v^\varepsilon,u^\varepsilon,s)\rangle \\
&-\langle \nu, \eta_2(v^\varepsilon,u^\varepsilon,s)\rangle\langle \nu, q_1(v^\varepsilon,u^\varepsilon,s)\rangle, \qquad (12.3.18)
\end{aligned}
$$

因为 $g(s) \geqslant \delta > 0$.

现在把方程 (12.3.18) 中的 s 当作常数, 则由定理 12.2.1 或定理 12.2.2 中的紧性框架即可证得所有的 Young 测度 ν 是 Dirac 测度, 从而得到定理 12.3.1 的证明. □

评　注

除了物理模型 (12.0.1) 之外, 下述由两个方程组成的数学系统

$$
z_t - (z^\gamma)_x = 0, \quad 1 < \gamma < 2
$$

的 L^p 弱解由 Frid 与 Santos 在文献 [77, 78] 中得到, 其中 $z = u + \mathrm{i}v \in \mathbb{C}$.

尽管系统 (12.3.1) 与系统 (12.0.1) 多少有点相似, 但直到现在, 它是唯一可得到 L^p 弱解的由三个方程组成的双曲系统. 系统 (12.3.1) 和色谱学系统 (7.5.1) 是仅有的两个可应用补偿列紧方法研究的由多个方程组成的双曲系统.

定理 12.3.1 的证明选自文献 [81].

第 13 章　松弛奇性的预备知识

考虑下述形式的偏微分方程组:

$$U_t + F(U)_x + \frac{1}{\tau}R(U) = \varepsilon U_{xx}. \tag{13.0.1}$$

这里 $U = U(x,t)$ 在 $\mathbb{R}^N$ 上取值, 它是一些基本物理量关于空间变量 x 的密度向量, τ 是松弛时间, 它在许多物理现象中是个很小的量. 在动力学理论中, 它是平均自由路程, 而在弹性力学中表示弹性的持续时间. ε 是人工黏性参数或扩散系数.

当 $\varepsilon = 0$ 时, 相应的系统

$$U_t + F(U)_x = 0$$

是双曲型的, 即 $N \times N$ 矩阵 $\nabla F(U)$ 有 N 个实根, 松弛系统

$$U_t + F(U)_x + \frac{1}{\tau}R(U) = 0$$

同样是双曲型方程, 它源于许多物理现象, 如燃烧理论 (见 [21~23]), 多相转移和相转移 (见 [82]), 色谱学 (见 [61, 83]), 黏弹性学 (见 [12, 84]), 动力学理论 (见 [85~87]), 河流模型 (见 [61, 88]) 以及交通流模型 (见 [61, 89]).

给定一个形如 (13.0.1) 的方程组, 无论数学上还是物理上都感兴趣的一件事情就是当松弛时间 τ 和黏性参数 ε 趋于零时解 $U^{\varepsilon,\tau}(x,t)$ 的极限行为.

考虑下述 2×2 方程组:

$$\begin{cases} u_t - v_x = \varepsilon u_{xx}, \\ v_t - cu_x + \dfrac{v - h(u)}{\tau} = \varepsilon v_{xx}, \end{cases} \tag{13.0.2}$$

其中, c 是常数, $h(u)$ 是 v 的平衡值. 方程组 (13.0.2) 是具有形式 (13.0.1) 的方程组中最简单的模型.

对于方程组 (13.0.2), 我们将说明: 若 $\varepsilon = 0$ 且系统

$$\begin{cases} u_t - v_x = 0, \\ v_t - cu_x = 0 \end{cases}$$

双曲, 即 $c > 0$, 则基本条件

$$-\sqrt{c} < h'(u) < \sqrt{c} \tag{13.0.3}$$

即所谓的次特征场条件是确保下述系统:

$$\begin{cases} u_t - v_x = 0, \\ v_t - cu_x + \dfrac{v - h(u)}{\tau} = 0 \end{cases} \tag{13.0.4}$$

的解 (u^τ, v^τ) 当 $\tau \to 0$ 时稳定的必要条件; 但是, 若 $\varepsilon = 0$, $c < 0$, 则方程组 (13.0.2) 与 (13.0.4) 是不适定的; 若 $\varepsilon > 0$, $\tau = o(\varepsilon)$, 也就是说, τ 比 ε 更小, 则方程组 (13.0.2) 的解 $(u^{\varepsilon,\tau}, v^{\varepsilon,\tau})$ 总是稳定的.

所有这些都能通过 Chapman-Enskog 型渐近展开式阐释清楚. 令

$$v = h(u) + \tau v_1 + O(\tau^2),$$

则由方程组 (13.0.2) 中的第二个方程得

$$\begin{aligned} v_1 &= \varepsilon v_{xx} - v_t + cu_x + O(\tau) \\ &= \varepsilon v_{xx} - h'(u)u_t + cu_x + O(\tau) \\ &= \varepsilon v_{xx} - \varepsilon h'(u)u_{xx} - h'(u)v_x + cu_x + O(\tau) \\ &= \varepsilon v_{xx} - \varepsilon h'(u)u_{xx} - (h'(u))^2 u_x + cu_x + O(\tau). \end{aligned} \tag{13.0.5}$$

把 (13.0.5) 代入 (13.0.2) 中的第一个方程, 有

$$\begin{aligned} u_t - h(u)_x &= \varepsilon u_{xx} + \tau v_{1x} + O(\tau^2) \\ &= \Big(\big(\varepsilon + \tau\big(c - h'(u)^2\big)\big)u_x\Big)_x + O(\tau^2) + O(\tau\varepsilon), \end{aligned} \tag{13.0.6}$$

所以若 $\varepsilon = 0$, $c > h'^2(u)$ 或者 $\varepsilon > 0$, $\tau = o(\varepsilon)$, 其中后一种情形蕴涵着 $\varepsilon > \tau(h'^2(u) - c)$, 则方程 (13.0.6) 是适定的, 因为此时扩散项系数是正的. 遗憾的是, 若 $\varepsilon = 0$ 且 $c < 0$, 则方程组

$$\begin{cases} u_t - v_x = 0, \\ v_t + |c|u_x = 0 \end{cases}$$

不适定, 因而方程组 (13.0.4) 也不适定, 这一点将在下面进行说明.

事实上, 从方程组 (13.0.4) 中的第一个方程可推出, 存在函数 $w(x,t)$ 使得

$$w_x = u, \quad w_t = v.$$

于是方程组 (13.0.4) 中的第二个方程可改写为

$$w_{tt} + |c|w_{xx} + \frac{1}{\tau}(w_t - h(w_x)) = 0.$$

这是一个椭圆型方程, 它带初值 $w(x,0)-\int_0^x u_0(s)\mathrm{d}s$ 的 Dirichlet 问题在 $t>0$ 内可求解. 但是这时 $v_0(x)$ 不能独立于 $u_0(x)$ 取值, 因为这种情形下 $v_0(x)=w_t(x,0)$, 而 w 依赖于 $u_0(x)$.

上面的分析说明, 除了次特征场条件 (13.0.3) 可保证双曲系统 (13.0.4) 解的稳定性之外, 方程组 (13.0.1) 中的黏性 ε 不仅是为了讨论其与松弛共同作用时数学上的方便, 而且还是另外一种必要的稳定机制.

在第 14 章, 我们关心的是带刚性松弛项与控制扩散项的一般 2×2 非线性守恒律系统的奇异极限, 建立了一些不带次特征场条件的紧性框架.

在第 15 章, 我们将研究一些特殊的带刚性松弛项的双曲系统的极限行为, 所有的紧性结果都基于次特征场条件.

在第 16 章, 我们研究了一些特殊的由多个方程组成的双曲系统的松弛问题.

第 14 章　刚性松弛与控制扩散

本章讨论一般 2×2 非线性守恒律系统的刚性松弛与控制扩散的奇异极限. 所谓刚性松弛与控制扩散, 指的是松弛时间 τ 趋于零的速度比扩散系数 ε 快, 即 $\tau = o(\varepsilon)$ $(\varepsilon\to 0)$. 我们将建立下述一般框架: 若系统的解关于 ε 存在先验一致 L^∞ 界, 则解序列收敛于这个系统相应的平衡解. 我们的结果表明这种极限的收敛行为既与稳定性准则无关也与相应的不带黏性的拟线性系统的双曲性无关, 这不同于第 15 章关于不带黏性的松弛系统的奇异极限. 这个框架可应用于带松弛项的一些重要的非线性系统, 比如弹性力学系统, 欧拉坐标系下的等熵流体动力学系统, 以及推广的交通流模型.

我们还考虑了一些没有 L^∞ 界估计的物理模型的奇异极限, 比如带刚性松弛项的拉格朗日坐标系下的等熵流体动力学系统和带刚性松弛项的交通流模型, 证明了相应的解序列在 L^p 空间中收敛于这些系统的平衡解, 如果松弛时间 τ 趋于零的速度比 ε 快.

14.1　两个重要的定理

我们讨论带松弛与扩散的一般 2×2 拟线性守恒律

$$\begin{cases} v_t + f(v,u)_x = \varepsilon v_{xx}, \\ u_t + g(v,u)_x + \dfrac{1}{\tau}\alpha(v,u)(u-h(v)) = \varepsilon u_{xx} \end{cases} \tag{14.1.1}$$

带可测初值

$$(v(x,0),u(x,0)) = (v_0(x),u_0(x)) \tag{14.1.2}$$

的柯西问题关于刚性松弛与控制扩散的奇异极限. (14.1.1) 中的第二个方程包含一个松弛装置, $h(v)$ 是 u 的平衡值, τ 是松弛时间, 函数 $\alpha(v,u)>0$, ε 是扩散系数. 松弛项在一些适当坐标系下的系统中起着阻尼作用.

方程组 (14.1.1) 的奇异极限问题可视为 τ 趋于零时的奇异扰动. 当 $\tau=\varepsilon$ 时, 一些经典模型的松弛系统已在文献 [90~92] 及其引用文献上得到很好的研究. 第 15 章将研究松弛系统中 $\varepsilon = o(\tau)$ 及相应的 2×2 系统

$$\begin{cases} v_t + f(v,u)_x = 0, \\ u_t + g(v,u)_x = 0 \end{cases} \tag{14.1.3}$$

是双曲型的情形.

本节考虑刚性松弛和控制扩散即 $\tau=o(\varepsilon)(\varepsilon\to 0)$ 的情形. 当柯西问题 (14.1.1)-(14.1.2) 的解在 L^∞ 空间中一致有界, 我们证明: 对于任何 C^1 类流函数 f 与 g, 这种极限总是稳定而无振荡发生.

定理 14.1.1 设 $f,\ g\in C^1(\mathbb{R}^2)$, $h\in C^2(\mathbb{R})$ 且 $\alpha_0\leqslant\alpha\in C(\mathbb{R}^2)$, 其中常数 $\alpha_0>0$. 如果 $\tau=o(\varepsilon)\ (\varepsilon\to 0)$, 并且柯西问题 (14.1.1)-(14.1.2) 的解 $(v^\varepsilon,u^\varepsilon)\equiv(v^{\varepsilon,\tau(\varepsilon)},u^{\varepsilon,\tau(\varepsilon)})$ 对任意给定的时间 T 有先验 L^∞ 界

$$\|v^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times[0,T])}\leqslant M(T),\quad \|v^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times[0,T])}\leqslant M(T),\tag{14.1.4}$$

其中, 常数 $M(T)>0$ 与 ε 无关, 那么存在子列 $\{(v^{\varepsilon_k},u^{\varepsilon_k})\}$ 几乎处处收敛于由下述 (E_1), (E_2) 唯一确定的平衡态 (v,u).

(E_1) $u(x,t)=h(v(x,t))$ $(a.e.\ (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,T])$;

(E_2) $v(x,t)$ 是柯西问题

$$v_t+f(v,h(v))_x=0,\quad v(x,0)=v_0(x)\tag{14.1.5}$$

的 L^∞ 熵解.

即使柯西问题 (14.1.1)–(14.1.2) 的解没有先验 L^∞ 估计, 也能证明松弛极限稳定, 如果初值满足

$$(v_0(x)-\bar{v},u_0(x)-\bar{u})\in L^\infty(\mathbb{R})\cap L^p(\mathbb{R}),\quad u=h(\bar{v}),\quad 1<p<\infty,\tag{14.1.6}$$

并且函数 $f,\ g$ 以及 $\alpha(u,v)$ 满足增长性条件:

(A_1) $|f(v,u)|+|g(v,u)|\leqslant c_1+c_2(|v|^q+|u|^q)$,

$|\nabla f(v,u)|+|\nabla g(v,u)|\leqslant c_3+c_4(|v|^{q-1}+|u|^{q-1}),\quad q\in[1,3)$;

(A_2) $0<c_5+c_6(|v|^r+|u|^r)\leqslant\alpha(v,u)\leqslant c_7+c_8(|v|^r+|u|^r),\quad 0\leqslant r<4$;

(A_3) $|h(v)|\leqslant c_9+c_{10}|v|^k,\quad k\geqslant 1$,

其中, $q,\ r,\ k,\ c_i\ (1\leqslant i\leqslant 10)$ 都是正常数.

定理 14.1.2 设初值 (v_0,u_0) 满足 (14.1.6) 且 $(A_1)\sim(A_3)$ 成立. 如果存在在柯西问题 (14.1.1)–(14.1.2) 的解之值域内严格凸的函数 $p(v,u)$ 使得

$$\bar{p}_u(v,u)=p_1(v,u)(u-h(v)),\quad \bar{p}(v,u)=\eta(v,u)+p(v,u),$$

其中, $p_1(v,u)\geqslant c_0>0$, $p(v,u)$ 是二阶导函数有界的光滑函数, $\eta(v,u)$ 是系统 (14.1.3) 的一个熵, 那么:

(I) 若 $2k(q-1)\leqslant r$ 且对任意给定的 $\varepsilon,\ \tau>0$ 存在大常数 $M_1>0$ 使得 $M_1\tau\leqslant\varepsilon$, 则柯西问题 (14.1.1)-(14.1.2) 存在唯一的光滑解 $(v^{\varepsilon,\tau},u^{\varepsilon,\tau})$, 并且

$$\|v^{\varepsilon,\tau}\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times[0,T])}\leqslant C(\varepsilon,\tau),\quad \|u^{\varepsilon,\tau})\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times[0,T])}\leqslant C(\varepsilon,\tau),\tag{14.1.7}$$

其中, 常数 $C(\varepsilon,\tau)>0$ 依赖于 ε 与 τ;

(II) 若 (I) 中的条件全部成立, 且 $2k(q-1)+p-2\leqslant r$, 则 $\|v^{\varepsilon,\tau}(\cdot,t)-\bar{v}\|_{L^p(\mathbb{R})}\leqslant M$;

(III) 若 (II) 中的条件全部成立, 且 $p>\max\{1,q,qk\}$, $\tau=o(\varepsilon)\quad(\varepsilon\to 0)$, 则存在 $(v^\varepsilon,u^\varepsilon)\equiv(v^{\varepsilon,\tau(\varepsilon)},u^{\varepsilon,\tau(\varepsilon)})$ 的子列 $\{(v^{\varepsilon_l},u^{\varepsilon_l})\}$ 几乎处处收敛:

$$(v^{\varepsilon_l},u^{\varepsilon_l})\xrightarrow{\text{a.e.}}(v,u)\quad(\varepsilon_l\to 0),\tag{14.1.8}$$

其中, 极限函数 (v,u) 满足 (F_1), (F_2):

(F_1) $u(x,t)=h(v(x,t))\quad(\text{a.e. }(x,t)\in\mathbb{R}\times(0,T])$;

(F_2) $v(x,t)$ 是柯西问题

$$v_t+f(v,h(v))_x=0,\quad v(x,0)=v_0(x)\tag{14.1.9}$$

的唯一 L^p 熵解.

注 14.1.1　若 $2k(q-1)\leqslant r$, 则由 $(A_1)\sim(A_3)$, 有

(A_4) $\{f_u(v,\beta)^2+g_u(v,\beta)^2+f'(v,h(v))^2+g'(v,h(v))^2\}/\alpha(v,u)\leqslant M$,

这里 β 在 u 与 $h(v)$ 之间取值.

这个不等式将在 14.4 节用来证明定理 14.1.2.

定理 14.1.1 的证明在 14.2 节给出. 它在带刚性松弛项的弹性力学系统、欧拉坐标系下的等熵气体动力学系统、交通流模型等中的应用在 14.3 节介绍.

定理 14.1.2 的证明在 14.4 节给出. 它在拉格朗日坐标系下的等熵气体动力学系统、带刚性松弛项的交通流模型等中的应用在 14.5 节介绍.

14.2　定理 14.1.1 的证明

本章中, 我们用 $M(T)$ 与 M 表示与 ε, τ 无关的一般常数, 它们在各种情形下可能不同, 但不再加以区分. 在证明定理 14.1.1 之前先介绍两个引理.

首先, 我们建立柯西问题 (14.1.1)-(14.1.2) 的解的整体存在性:

引理 14.2.1　若柯西问题 (14.1.1)-(14.1.2) 的解有先验 L^∞ 界 (14.1.4), 则对任意给定的 ε, $\tau>0$, 柯西问题 (14.1.1) (14.1.2) 在 $\mathbb{R}\times(0,T]$ 上的光滑解存在唯一.

证明　柯西问题 (14.1.1)-(14.1.2) 的解的局部存在性和正则性可通过把压缩映像原理应用于方程组 (14.1.1) 的积分表示得到. 由于局部时间只依赖于 ε, τ 及初值的 L^∞ 范数, 所以利用先验 L^∞ 估计 (14.1.4) 即可得到解的整体存在性. 证毕. □

其次, 有下述估计:

引理 14.2.2　若柯西问题 (14.1.1)-(14.1.2) 的解有先验 L^∞ 界 (14.1.4), 且 f, $g\in C^1(\mathbb{R}^2)$, $h\in C^2(\mathbb{R})$, 则

$$\|\varepsilon(v_x^2+u_x^2)\|_{L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)}\leqslant M,\quad\left\|\frac{(u-h(v))^2}{\tau}\right\|_{L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)}\leqslant M\tag{14.2.1}$$

如果 $M_1\tau\leqslant\varepsilon$ 对某个大常数 $M_1>0$ 成立.

证明 引理 14.2.2 中已略去黏性解的上标 ε, τ. 因为 (v,u) 有界, 所以可选取大常数 $C_1>0$ 使得函数 $p(v,u)=\dfrac{u^2}{2}-h(v)u+\dfrac{C_1v^2}{2}$ 满足

$$p_{vv}(v,u)v_x^2+2p_{vu}(v,u)v_xu_x+p_{uu}(v,u)u_x^2\geqslant C_2(v_x^2+u_x^2) \tag{14.2.2}$$

对某个正常数 C_2 成立.

用 (p_v,p_u) 乘方程组 (14.1.1), 则由不等式 (14.2.2) 得

$$\begin{aligned}&p(v,u)_t+p_v(v,u)f(v,u)_x+p_u(v,u)g(v,u)_x\\&+\alpha(v,u)\frac{(u-h(v))^2}{\tau}+\varepsilon C_2(v_x^2+u_x^2)\\\leqslant\ &\varepsilon p_{xx}(v,u).\end{aligned} \tag{14.2.3}$$

经过简单计算, 有

$$\begin{aligned}p_v(v,u)f(v,u)_x=&\Big(p_v(v,u)(f(v,u)-f(v,h(v)))\Big)_x\\&+p_v(v,h(v))f(v,h(v))_x\\&-p_{vx}(v,u)[f(v,u)-f(v,h(v))]\\&+[p_v(v,u)-p_v(v,h(v))]f(v,h(v))_x\\=&\Big(p_v(v,u)(f(v,u)-f(v,h(v)))\Big)_x\\&+\Big(\int^v p_v(s,h(s))f'(s,h(s))\mathrm{d}s\Big)_x\\&-[p_{vu}(v,u)u_x+p_{vv}(v,u)v_x]f_u(v,\beta_1)(u-h(v))\\&+p_{vu}(v,\beta_2)(u-h(v))f'(v,h(v))v_x,\end{aligned} \tag{14.2.4}$$

以及

$$\begin{aligned}p_u(v,u)g(v,u)_x=&\Big(p_u(v,u)(g(v,u)-g(v,h(v)))\Big)_x\\&+\Big(\int^v p_u(s,h(s))g'(s,h(s))\mathrm{d}s\Big)_x\\&-[p_{uu}(v,u)u_x+p_{vu}(v,u)v_x]g_u(v,\beta_3)(u-h(v))\\&+p_{uu}(v,\beta_4)(u-h(v))g'(v,h(v))v_x,\end{aligned} \tag{14.2.5}$$

其中

$$p_v(v,h(v))=p_v(v,u)|_{u=h(v)},\quad f'(v,h(v))=\frac{\mathrm{d}f(v,h(v))}{\mathrm{d}v},$$

β_i $(1\leqslant i\leqslant 4)$ 在 u 与 $h(v)$ 之间取值. 所以利用经典的 Young 不等式可由式 (14.2.2)~(14.2.5) 推出

$$\begin{aligned}&p(v,u)_t+q(v,u)_x+c_0\frac{(u-h(v))^2}{2\tau}+\varepsilon C_2(v_x^2+u_x^2)\\&-\tau C_3(v_x^2+u_x^2)\\\leqslant\ &\varepsilon p_{xx}(v,u)\end{aligned}\tag{14.2.6}$$

对一适当的函数 q 与正常数 c_0 以及依赖于 p 的二阶导数和 f, g 的一阶导数之界的正常数 C_3 成立.

把不等式 (14.2.6) 乘以一个适当的试验函数并在 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ 上分部积分, 即可得到估计 (14.2.1), 如果 $2\tau C_3\leqslant\varepsilon C_2$, 从而引理 14.2.2 获得证明. □

定理 14.1.1 的证明　我们把方程组 (14.1.1) 中的第一个方程改写为

$$v_t+f(v,h(v))_x=\varepsilon v_{xx}+\big(f(v,h(v))-f(v,u)\big)_x.\tag{14.2.7}$$

设 $(\eta(v),q(v))$ 是标量方程

$$v_t+f(v,h(v))_x=0$$

的任一熵–熵流, 则用 $\eta'(v)$ 乘方程 (14.2.7), 有

$$\begin{aligned}\eta(v)_t+q(v)_x&=-\eta'(v)\big(f(v,u)-f(v,h(v))\big)_x+\varepsilon\eta'(v)v_{xx}\\&=-\big(\eta'(v)(f(v,u)-f(v,h(v)))\big)_x+\varepsilon\eta(v)v_{xx}\\&\quad+[f(v,u)-f(v,h(v))]\eta''(v)v_x-\varepsilon\eta''(v)v_x^2\\&=-\big(\eta'(v)f_u(v,\gamma_1)(u-h(v))\big)_x+\varepsilon\eta(v)v_{xx}\\&\quad+f_u(v,\gamma_2)\eta''(v)(u-h(v))v_x-\varepsilon\eta''(v)v_x^2,\end{aligned}\tag{14.2.8}$$

其中, γ_i $(i=1,2)$ 在 u 与 $h(v)$ 之间取值.

由 (14.2.1) 中的估计式, 在任意紧集 $\Omega\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ 上有

$$\begin{aligned}&\int_\Omega|f_u\eta''(v)(u-h(v))v_x|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\\leqslant\ &M\left(\int_\Omega\frac{(u-h(v))^2}{\tau}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{\frac12}\left(\int_\Omega\tau v_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{\frac12}\to0\quad(\varepsilon\to0),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega (\eta'(v)f_u(u-h(v)))_x\phi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right| \\
=&\left|\int_\Omega \eta'(v)f_u(u-h(v))\phi_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right| \\
\leqslant& M\Big(\int_\Omega \tau\phi_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big)^{\frac12}\Big(\int_\Omega \frac{(u-h(v))^2}{\tau}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big)^{\frac12} \to 0 \quad (\varepsilon\to 0).
\end{aligned}
$$

此外, 由于 $\varepsilon\eta''(v)v_x^2$ 在 $L^1_{\rm loc}$ 中有界, $\varepsilon\eta(v)_{xx}\to 0$ 在分布意义下成立, 所以等式 (14.2.8) 的右端对某个常数 $q\in(1,2)$ 在 $W^{-1,q}_{\rm loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中紧. 注意到等式 (14.2.8) 的左端在 $W^{-1,\infty}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中有界, 我们有

$$\eta(v^\varepsilon)_t+q(v^\varepsilon)_x \ \ \text{关于黏性解}\ v^\varepsilon\ \ \text{在}\ W^{-1,2}_{\rm loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)\ \ \text{中紧}.$$

因此由第 3 章中关于标量方程的紧性框架即得 $\{v^\varepsilon\}$ 的强收敛性. 再由 (14.2.1) 中的第二个估计可得 $\{u^\varepsilon\}$ 的强收敛性. 这就完成了定理 14.1.1 的证明. □

注 14.2.1 *在定理 14.1.1 中, 关于非线性流函数 $f(v,h(v))$ 的条件 (3.1.6) 没有作为假设以确保 $\{v^\varepsilon\}$ 的强收敛性. 事实上, 如第 3 章评注中最后一部分所述那样, Szepessy[24] 去除了这一条件. 更多的细节请参看文献 [3].*

14.3 定理 14.1.1 的应用

本节把定理 14.1.1 应用于一些重要的物理模型, 如带刚性松弛项的弹性力学系统、欧拉坐标系下的等熵气体动力学系统、交通流模型等.

14.3.1 弹性力学系统

弹性力学系统

$$
\begin{cases}
v_t+u_x=0,\\
u_t+\sigma(v)_x=0
\end{cases}
\tag{14.3.1}
$$

是描述质量和动量守恒的一个双曲型方程组. 对于 $v\sigma''(v)>0$ $(v\in\mathbb{R}\backslash\{0\})$ 的情形, 系统 (14.3.1) 的大初值整体 L^∞ 弱解的存在性已在第 11 章得到证明; 而对于 $v\sigma''(v)<0$ $(v\in\mathbb{R}\backslash\{0\})$ 的情形, 系统 (14.3.1) 的 L^p 弱解的存在性已在第 12 章给予介绍.

下面考虑带松弛项的弹性力学系统:

$$
\begin{cases}
v_t+u_x=\varepsilon v_{xx},\\
u_t+\sigma(v)_x+\dfrac{u-h(v)}{\tau}=\varepsilon u_{xx}.
\end{cases}
\tag{14.3.2}
$$

系统 (14.3.1) 的零松弛与耗散极限最先由 Chen, Levermore 和 Liu 在文献 [12] 中进行了研究. 应用不变域理论, 他们最早得到了柯西问题 (14.3.2) 带有界初值 $(v_0(x), u_0(x))$ 的解 $(v^{\varepsilon,\tau}, u^{\varepsilon,\tau})$ 的 L^∞ 估计, 如果函数 $\sigma(v)$ 和 $h(v)$ 满足下述假设:

(B_1) $\sigma(v) \in C^2(\mathbb{R})$, $\sigma'(v) > 0$, 且 $v\sigma''(v) > 0$ $(v \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$;

(B_2) 稳定性条件 $|h'(v)| \leqslant \sqrt{\sigma'(v)}$;

(B_3) $h \in C^1(\mathbb{R})$, 存在常数 $M_0 > 0$ 使得当 $|v| \geqslant M_0$ 时 $h(v) \equiv \bar{h}$, 其中, $\bar{h}$ 是常数.

事实上, 应用比较原理可去除假设 (B_3) (见文献 [84]); 而且应用文献 [84] 中定理 7.1 的证明方法可把条件 (B_1) 减弱为

$(\bar{B}_1)$ $\sigma(v) \in C^2(\mathbb{R})$, $\sigma'(v) \geqslant 0$, 但 $\mathrm{meas}\{v \in \mathbb{R} : \sigma'(v) = 0\} = 0$, 且 $v\sigma''(v) > 0$ $(v \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$.

考虑 $(v^{\varepsilon,\tau}, u^{\varepsilon,\tau})$ 当 τ 与 ε 趋于零时的收敛性时, 下述两个假设在文献 [12] 和 [84] 中均被使用:

(B_4) $h(v) \in C^1(\mathbb{R})$, 且 $h(v)$ 在任何区间上都不是仿射;

(B_5) $\|v_0(x)\|_{L^\infty} \leqslant N_0$, $\|u_0(x)\|_{L^\infty} \leqslant N_0$ 对某个适当的正常数 N_0 成立. 但对 τ 与 ε 间的量阶没有限制, 且允许初值振荡.

利用定理 14.1.1 与 $(\bar{B}_1)$ 中的有界性估计以及 (B_2), 我们有下述定理.

定理 14.3.1 *若函数 $h(v)$, $\sigma(v)$ 满足假设 $(\bar{B}_1)$ 和 (B_2), 则存在柯西问题 (14.3.2) 带有界可测初值 (14.1.2) 的整体光滑解 $(v^\varepsilon, u^\varepsilon)$ 的子列 $\{(v^{\varepsilon_k}, u^{\varepsilon_k})\}$ 强收敛于由 $h(v)$ 与 $v_0(x)$ 唯一确定的平衡态 (v, u) (见定理 14.1.1 中的 (E_1), (E_2)).*

14.3.2 欧拉坐标系下的等熵气体动力学系统

欧拉坐标系下的等熵气体动力学系统是非线性双曲守恒律:

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + P(\rho))_x = 0, \end{cases} \tag{14.3.3}$$

其中, ρ, $m = \rho u$ 与 $P(\rho)$ 分别表示密度、动量与压强. 对于多方气体即 $P(\rho) = \kappa\rho^\gamma$ $(\kappa > 0)$ 的情形, 绝热指数 $\gamma \geqslant 1$ 时该系统大初值整体弱解的存在性已在第 8 章给予证明.

在系统 (14.3.3) 中加入松弛项, 得到下述系统:

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + P(\rho))_x + \dfrac{\rho u - h(\rho)}{\tau} = 0, \end{cases} \tag{14.3.4}$$

它源于许多实际情形, 如带摩擦的洪水流或河流方程组 (见文献 [12, 61, 93]).

现在考虑带黏性的松弛系统的柯西问题:

$$\begin{cases} \rho_t + m_x = \varepsilon \rho_{xx}, \\ m_t + \left(\dfrac{m^2}{\rho} + P(\rho)\right)_x + \dfrac{m - h(\rho)}{\tau} = \varepsilon m_{xx} \end{cases} \tag{14.3.5}$$

带有界可测初值

$$(\rho(x,0), m(x,0)) = (\rho_0^{\varepsilon,\tau,\delta}(x), m_0^{\varepsilon,\tau,\delta}(x)) \equiv (\rho_0(x) + \delta, \rho_0(x)u_0(x)). \tag{14.3.6}$$

应用不变域原理, Lattanzio 和 Marcati[94] 对 $h(\rho) = \rho(1-\rho)$ 的情形得到了柯西问题 (14.3.5) (14.3.6) 的解的先验 L^∞ 界估计. 他们还考虑了系统 (14.3.4) 在远离真空的区域中的零松弛现象.

幸运的是, 定理 14.1.1 只要求解关于松弛时间和耗散参数的一致 L^∞ 界估计, 所以我们对更一般的情形也可以得到柯西问题 (14.3.5)–(14.3.6) 的解的收敛性, 即使解包含真空.

定理 14.3.2 *设函数 $P(\rho) \in C^2(0,\infty)$ 具有性质: 当 $\rho > 0$ 时, $P'(\rho) > 0$, $2P'(\rho) + \rho P''(\rho) \geqslant 0$, 并且*

$$\int_c^\infty \frac{\sqrt{P'(\rho)}}{\rho} \mathrm{d}\rho = \infty, \quad \int_0^c \frac{\sqrt{P'(\rho)}}{\rho} \mathrm{d}\rho < \infty, \quad \forall c > 0.$$

如果存在常数 N, $L > 0$ 使得区域

$$\Sigma_{10} = \{(\rho, m) : w \leqslant N, z \geqslant -L, \rho \geqslant 0\}$$

包含曲线段 $m = h(\rho)$ $(0 \leqslant \rho \leqslant \bar{\rho})$ 与初值 $(\rho_0^\delta(x), m_0^\delta(x))$, 且 $m = h(\rho)$ 经过曲线 $w = N$ 和 $z = -L$ 的两个交点 $(0,0)$ 与 $(\bar{\rho}, \bar{m})$ $(\bar{\rho} > 0)$, 如图 14.1 所示, 那么对任意给定的 ε, $\tau > 0$ 和 $\delta > 0$, 柯西问题 (14.3.5) (14.3.6) 的光滑解 $(\rho^{\varepsilon,\tau,\delta}, u^{\varepsilon,\tau,\delta})$ 存在唯一且满足

$$0 < c(t,\varepsilon,\delta) \leqslant \rho^{\varepsilon,\tau,\delta}(x,t) \leqslant M, \quad |u^{\varepsilon,\tau,\delta}(x,t)| \leqslant M. \tag{14.3.7}$$

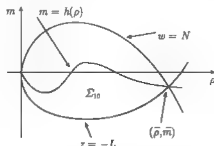


图 14.1 系统 (14.3.5) 的不变域

进一步, 若 $\tau = o(\varepsilon)$ $(\varepsilon \to 0)$, 则存在子列 $\{(\rho^{\varepsilon,\tau,\delta}, u^{\varepsilon,\tau,\delta})\}$ 几乎处处收敛:

$$(\rho^{\varepsilon,\tau,\delta}, \rho^{\varepsilon,\tau,\delta} u^{\varepsilon,\tau,\delta}) \xrightarrow{\text{a.e.}} (\rho, m) \quad (\delta,\ \varepsilon \to 0),$$

其中, 极限函数 (ρ, m) 是由 $h(\rho)$ 与 $\rho_0(x)$ 唯一确定的平衡态 (见定理 14.1 1 中的 (E_1), (E_2)).

证明 为了证得式 (14.3.7), 分别用 (w_ρ, w_m) 和 (z_ρ, z_m) 乘系统 (14.3.5) 得

$$\begin{aligned} w_t + \lambda_2 w_x + \frac{\rho u - h(\rho)}{\tau\rho} &= \varepsilon w_{xx} + \frac{2\varepsilon}{\rho}\rho_x w_x \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{2\rho^2\sqrt{P'(\rho)}}(2P' + \rho P'')\rho_x^2, \\ z_t + \lambda_1 z_x + \frac{\rho u - h(\rho)}{\tau\rho} &= \varepsilon z_{xx} + \frac{2\varepsilon}{\rho}\rho_x z_x \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2\rho^2\sqrt{P'(\rho)}}(2P' + \rho P'')\rho_x^2. \end{aligned}$$

于是由 $P(\rho)$ 的性质有

$$\begin{cases} w_t + \lambda_2 w_x + \dfrac{\rho u - h(\rho)}{\tau\rho} \leqslant \varepsilon w_{xx} + \dfrac{2\varepsilon}{\rho}\rho_x w_x, \\ z_t + \lambda_1 z_x + \dfrac{\rho u - h(\rho)}{\tau\rho} \geqslant \varepsilon z_{xx} + \dfrac{2\varepsilon}{\rho}\rho_x z_x. \end{cases}$$

若曲线 $m = h(\rho)$ 经过曲线 $w = N$ 和 $z = -L$ 的两个交点 $(0,0)$ 与 $(\bar\rho, \bar m)$, 且当 $0 \leqslant \rho \leqslant \bar\rho$ 时, 它在曲线 $z = -L$ 的上方而在曲线 $w = N$ 的下方, 则容易验证

$$\Sigma_{10} = \{(\rho, m) : w \leqslant N, z \geqslant -L, \rho \geqslant 0\}$$

是系统 (14.3.5) 的不变域. 所以有下述估计:

$$0 \leqslant \rho^{\varepsilon,\tau,\delta} \leqslant M, \quad |u^{\varepsilon,\tau,\delta}| \leqslant M,$$

因为 $\int_c^\infty \sqrt{P'(\rho)}/\rho \mathrm{d}\rho = \infty$ 与 $\int_0^c \sqrt{P'(\rho)}/\rho \mathrm{d}\rho < \infty$ 对任意常数 $c > 0$ 成立.

估计式 (14.3.7) 中关于 $\rho^{\varepsilon,\tau,\delta}$ 的正下界可由定理 1.0.1 的最后一部分得到. 然后根据定理 14.1.1 即可完成本定理的证明. □

14.3.3 推广的交通流模型: L^∞ 解

本部分考虑推广的交通流模型:

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = \varepsilon\rho_{xx}, \\ u_t + \left(\dfrac{u^2}{2} + g(\rho)\right)_x + \dfrac{u - h(\rho)}{\tau} = \varepsilon u_{xx} \end{cases} \tag{14.3.8}$$

带有界可测初值

$$(\rho(x,0),u(x,0))=(\rho_0(x),u_0(x))\quad(\rho_0(x)\geqslant 0)\tag{14.3.9}$$

的柯西问题的黏性解.

相应的双曲系统:

$$\begin{cases}\rho_t+(\rho u)_x=0,\\ u_t+\left(\dfrac{u^2}{2}+g(\rho)\right)_x=0\end{cases}\tag{14.3.10}$$

的弱解存在性已在第 9、第 10 章给予证明.

系统 (14.3.10) 加上奇异松弛项的系统

$$\begin{cases}\rho_t+(\rho u)_x=0,\\ u_t+\left(\dfrac{u^2}{2}+g(\rho)\right)_x+\dfrac{u-h(\rho)}{\tau}=0\end{cases}\tag{14.3.11}$$

的零松弛极限的研究始于 Schochet[88]. 系统 (14.3.11) 在推导汽车交通流的数学模型时导出 (见文献 [61]), 它在 $g(\rho)=\dfrac{\mu}{\tau}\ln\rho$ 时的整体古典解由 Schochet[89] 得到, 如果 τ 充分小且 $\tau\leqslant\mu^{3+\alpha}$, $\alpha>0$.

根据定理 14.1.1, 有下述定理.

定理 14.3.3 设 $g'(\rho)\geqslant 0$, 且 $g'(\rho)/\rho$ 单调非减. 如果存在常数 N, $L>0$ 使得曲线 $u=h(\rho)$ 经过曲线 $w=N$ 与 $z=-L$ 的唯一交点 $(\bar\rho,\bar u)$, 并且曲线段 $u=h(\rho)$ $(0\leqslant\rho\leqslant\bar\rho)$ 和初值 $(\rho_0(x),u_0(x))$ 都落在闭域

$$\Sigma_{11}=\{(\rho,u):w\leqslant N,z\geqslant -L,\rho\geqslant 0\}$$

之中, 如图 14.2所示, 那么对任意给定的 ε, $\tau>0$, 柯西问题 (14.3.8)~(14.3.9) 的光滑解 $(\rho^{\varepsilon,\tau},u^{\varepsilon,\tau})$ 存在唯一且满足

$$0\leqslant\rho^{\varepsilon,\tau}\leqslant M,\quad |u^{\varepsilon,\tau}|\leqslant M.\tag{14.3.12}$$

进一步, 若 $\tau=o(\varepsilon)$ $(\varepsilon\to 0)$, 则存在子列 $\{(\rho^{\varepsilon,\tau},u^{\varepsilon,\tau})\}$ 使得当 $\varepsilon\to 0$ 时几乎处处收敛于由 $h(\rho)$ 与 $\rho_0(x)$ 唯一确定的平衡态 (ρ,u) (见定理 14.1.1 中的 (E_1), (E_2)).

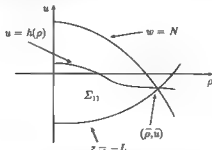


图 14.2 系统 (14.3.8) 的不变域

证明 注意到定理 14.1.1 中的结论, 证明的关键仍是推导 L^∞ 界估计 (14.3.12). 分别用 (w_ρ, w_u) 与 (z_ρ, z_u) 乘系统 (14.3.8), 其中 w 与 z 是系统 (14.3.10) 的黎曼不变量, 有

$$w_t + \lambda_2 w_x + \frac{1}{\tau}(u - h(\rho)) = \varepsilon w_{xx} - \varepsilon(\sqrt{g'/\rho})'\rho_x^2 \leqslant \varepsilon w_{xx},$$

$$z_t + \lambda_1 z_x + \frac{1}{\tau}(u - h(\rho)) = \varepsilon z_{xx} + \varepsilon(\sqrt{g'/\rho})'\rho_x^2 \geqslant \varepsilon z_{xx}.$$

根据假设, 存在常数 N, $L > 0$ 使得曲线 $u = h(\rho)$ 经过曲线 $w = N$ 与 $z = -L$ 的唯一交点 $(\bar{\rho}, \bar{u})$, 并且曲线段 $u = h(\rho)$ $(0 \leqslant \rho \leqslant \bar{\rho})$ 和初值 $(\rho_0(x), u_0(x))$ 都落在闭域

$$\Sigma_{11} = \{(\rho, u) : w \leqslant N, z \geqslant -L, \rho \geqslant 0\}$$

之中, 所以 Σ_{11} 一定是系统 (14.3.8) 的一个不变域. 这就完成了定理 14.3.3 的证明. □

14.4 定理 14.1.2 的证明

本节分几步来证明定理 14.1.2.

(I) 的证明 把压缩映射原理应用于方程组 (14.1.1) 的积分表示, 可得到柯西问题 (14.1.1) (14.1.2) 的解的局部存在性和正则性, 其中局部时间只依赖于 ε, τ 及初值的 L^∞ 范数. 所以只要得到下面给予证明的先验 L^∞ 估计 (14.1.7) 就可得到解的整体存在性. 定义

$$\tilde{\bar{p}}(v, u) = \bar{p}(v, u) - \bar{p}(\bar{v}, \bar{u}) - \bar{p}_v(v, \bar{u})(v - \bar{v}) - p_u(\bar{v}, \bar{u})(u - \bar{u}),$$

类似地定义 $\tilde{\eta}(v, u)$ 与 $\tilde{p}(v, u)$.

因为 $\tilde{\bar{p}}(v, u)$ 严格凸, 所以存在常数 $C_2 > 0$ 使得

$$\tilde{\bar{p}}_{vv}(v, u)v_x^2 + 2\tilde{\bar{p}}_{vu}(v, u)v_x u_x + \tilde{\bar{p}}_{uu}(v, u)u_x^2 \geqslant C_2(v_x^2 + u_x^2).$$

由于 $\tilde{\eta}(v, u)$ 是系统 (14.1.3) 的熵, 所以可设其相应的一个熵流为 $Q(v, u)$. 注意到 $\bar{p}(v, u) = \eta(v, u) + p(v, u)$, 所以用 $(\tilde{\bar{p}}_v, \tilde{\bar{p}}_u)$ 乘方程组 (14.1.1) 得

$$\begin{aligned}
&\tilde{\bar{p}}_t(v, u) + Q_x(v, u) + \tilde{\bar{p}}_v f(v, u)_x + \tilde{\bar{p}}_u g(v, u)_x \\
&+ \frac{1}{\tau}p_1(v, u)\alpha(v, u)(u - h(v))^2 + \varepsilon C_2(v_x^2 + u_x^2) \\
\leqslant\ & \varepsilon\tilde{\bar{p}}_{xx}(v, u).
\end{aligned}$$

于是利用 (14.2.4)-(14.2.5) 以及条件 $(A_1)\sim(A_4)$ 有

$$\begin{aligned}&\tilde{\bar{p}}(v,u)_t+\bar{Q}(v,u)_x+\frac{1}{2\tau}c_0\alpha(v,u)(u-h(v))^2\\&+(\varepsilon C_2-C_3\tau)(v_x^2+u_x^2)\\\leqslant\ &\varepsilon\tilde{p}_{xx}(v,u)\end{aligned}$$

对适当的函数 $\bar{Q}(v,u)$ 及依赖于 p 的二阶导数之界的常数 C_3 成立. 因此, 有下述估计:

$$\begin{cases}\|(v(\cdot,t)-\bar{v},u(\cdot,t)-\bar{u})\|_{L^2(\mathbb{R})}\leqslant M,\\ \left\|\varepsilon(v_x^2+u_x^2)+\dfrac{\alpha(v,u)(u-h(v))^2}{\tau}\right\|_{L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)}\leqslant M,\end{cases}\tag{14.4.1}$$

如果 $\varepsilon C_2>2C_3\tau$.

分别用 v_{xx} 和 u_{xx} 乘方程组 (14.1.1) 中的第一、二个方程, 然后把得到的结果相加, 并在 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ 上分部积分得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(v_x^2+u_x^2)\mathrm{d}x+\varepsilon\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}(v_{xx}^2+u_{xx}^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\=\ &\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}v_x^2(x,0)+u_x^2(x,0)\mathrm{d}x+\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}f(v,u)_xv_{xx}\\&+\left[g(v,u)_x+\frac{1}{\tau}\alpha(v,u)(u-h(v))\right]u_{xx}\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\end{aligned}\tag{14.4.2}$$

所以由式 (14.4.1), (14.4.2) 以及增长性条件 (A_1), (A_2) 推出

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}(v_x^2+u_x^2)\mathrm{d}x&\leqslant c_0(\varepsilon,\tau)(1+|v|_\infty^{2(q-1)}+|u|_\infty^{2(q-1)}+|\alpha(v,u)|_\infty)\\&\leqslant c_0(\varepsilon,\tau)(1+|v|_\infty^{2(q-1)}+|u|_\infty^{2(q-1)}+|v|_\infty^r+|u|_\infty^r),\end{aligned}$$

其中, $|\cdot|_\infty$ 表示 L^∞ 范数. 因为

$$\begin{aligned}v^2+u^2=\int_{-\infty}^{x}(v^2+u^2)_x\mathrm{d}x&\leqslant 2\|v\|_{L^2}\|v_x\|_{L^2}+2\|u\|_{L^2}\|u_x\|_{L^2}\\&\leqslant c_1(\varepsilon,\tau)(1+|v|_\infty^{2(q-1)}+|u|_\infty^{2(q-1)}+|v|_\infty^r+|u|_\infty^r)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

其中, $2(q-1)<4$, $r<4$, 所以存在常数 $C(\varepsilon,\tau)>0$ 使得

$$\|v(x,t)\|_{L^\infty}\leqslant C(\varepsilon,\tau),\quad \|u(x,t)\|_{L^\infty}\leqslant C(\varepsilon,\tau).$$

(II) 的证明 用 $p|v-\bar{v}|^{p-2}(v-\bar{v})$ 乘方程组 (14.1.1) 中的第一个方程, 有

$$\begin{aligned}&(|v-\bar{v}|^p)_t+P(v,u)_x-p(p-1)(f(v,u)-f(v,h(v)))|v-\bar{v}|^{p-2}v_x\\=\ &\varepsilon(|v-v|^p)_{xx}-\varepsilon p(p-1)|v-v|^{p-2}v_x^2,\end{aligned}\tag{14.4.3}$$

其中

$$P(v,u)=p|v-\bar{v}|^{p-2}(v-v)(f(v,u)-f(v,h(v)))\\ +\int^{v}p|v-\bar{v}|^{p-2}(v-\bar{v})f'(v,h(v))\mathrm{d}v.$$

因为 $|f(v,u)-f(v,h(v))|=|f_u(v,\mu)(u-h(v))|$, 其中 μ 在 u 与 $h(v)$ 之间取值, 所以从等式 (14.4.3) 可推出

$$\begin{aligned}&(|v-\bar{v}|^p)_t+P(v,u)_x+\varepsilon p(p-1)|v-\bar{v}|^{p-2}v_x^2\\ \leqslant&\ \varepsilon(|v-\bar{v}|^p)_{xx}+\frac{\alpha(v,u)(u-h(v))^2}{\tau}\\ &+\frac{\tau p(p-1)|v-\bar{v}|^{p-2}|f_u(v,\mu)|^2}{\alpha(v,u)}p(p-1)|v-\bar{v}|^{p-2}v_x^2\\ \leqslant&\ \varepsilon(|v-\bar{v}|^p)_{xx}+\frac{\alpha(v,u)(u-h(v))^2}{\tau}+\frac{\varepsilon}{2}p(p-1)|v-\bar{v}|^{p-2}v_x^2,\end{aligned}\tag{14.4.4}$$

如果 $2\tau p(p-1)M\leqslant\varepsilon$; 而由条件 $2k(q-1)+p-2\leqslant r$ 可得

$$\frac{p(p-1)|v-\bar{v}|^{p-2}|f_u(v,\mu)|^2}{\alpha(v,u)}\leqslant M.$$

所以在 $\mathbb{R}\times[0,t]$ 上对 (14.4.4) 分部积分即得

$$\|v^{\varepsilon,\tau}(\cdot,t)-\bar{v}\|_{L^p(\mathbb{R})}\leqslant M.$$

(III) 的证明　因为 $p>\max\{1,q,qk\}$ 且

$$|f(v,h(v))|\leqslant c_1+c_2(|v|^q+|h(v)|^q)\leqslant M(1+|v|^q+|v|^{qk}),$$

所以 (III) 中的 (F_1) 与 (F_2) 可由 (14.1.8) 及估计式

$$\|v^{\varepsilon,\tau}(\cdot,t)-\bar{v}\|_{L^p}\leqslant M,\quad \left\|\frac{\alpha(v,u)(u-h(v))^2}{\tau}\right\|_{L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)}\leqslant M$$

直接得到; 而运用证明引理 3.2.4 的相同方法即可证得 (14.1.8). 这就完成了定理 14.1.2 的证明. □

注 14.4.1　为了证明简洁, 我们在第 3 章需要关于非线性流函数 $f(v)$ 的技术性假设 (3.1.6) 及增长性条件 $|f(v)|\leqslant c_1+c_2|v|^{\frac{p}{2}}$ 来证明黏性解序列在 L^p 空间中的强收敛性. 在定理 14.1.2 中, 条件 (3.1.6) 被去除且关于非线性函数 $f(v,h(v))$ 的增长性条件减弱为

$$|f(v,h(v))|\leqslant c_1+c_2|v|^q,\quad q<p.$$

这些细节及相关评注请参阅文献 [3, 24].

14.5 定理 14.1.2 的应用

本节我们把定理 14.1.2 应用于一些没有 L^∞ 界估计的物理模型, 如带刚性松弛项的拉格朗日坐标系下的等熵气体动力学系统、弹性力学系统中 $v\sigma''(v)<0 \quad (v\in \mathbb{R}\backslash\{0\})$ 的情形以及交通流模型, 讨论它们的零松弛与耗散极限.

14.5.1 拉格朗日坐标系下的等熵气体动力学系统

考虑带松弛项的拉格朗日坐标系下的等熵气体动力学系统:

$$\begin{cases} v_t - u_x = \varepsilon v_{xx}, \\ u_t + g(v)_x + \dfrac{1}{\tau}\alpha(v,u)(u-h(v)) = \varepsilon u_{xx} \end{cases} \tag{14.5.1}$$

带可测初值

$$(v(x,0),u(x,0)) = (v_0(x),u_0(x)) \tag{14.5.2}$$

的黏性解, 其中流函数 $g(v)$ 满足当 $v>0$ 时 $g'(v)\leqslant 0,\ g''(v)>0$. 相应于 (14.5.1) 的双曲系统的两个特征值为

$$\lambda_1 = -\sqrt{-g'(v)}, \quad \lambda_2 = \sqrt{-g'(v)}$$

其相应的两个黎曼不变量为

$$z(v,u) = u + \int_{v_1}^{v}\sqrt{-g'(v)}\mathrm{d}v, \quad w(v,u) = u - \int_{v_1}^{v}\sqrt{-g'(v)}\mathrm{d}v,$$

其中, 常数 $v_1>0$.

设初值 $(v_0(x),u_0(x))$ 落在开区域

$$\Sigma_{12} = \{(v,u): z(v,u)>0, w(v,u)<0\}$$

之中且 $(v_0(x)-\bar{v}, u_0(x)-\bar{u})\in L^\infty(\mathbb{R})\cap L^p(\mathbb{R})\ (1<p<\infty)$, 其中常数 $\bar{v}\geqslant v_1,\ u=h(\bar{v})$, 有

定理 14.5.1 (I) 设当 $v\geqslant v_1$ 时有

$$-\int_{v_1}^{v}\sqrt{-g'(v)}\mathrm{d}v \leqslant h(v) \leqslant \int_{v_1}^{v}\sqrt{-g'(v)}\mathrm{d}v,$$

$$\left(h'(v)^2 + g'(v)^2 + |h''(v)|\int_{v_0}^{v}\sqrt{-g'(v)}\mathrm{d}v\right)/\alpha(v,u) \leqslant K,$$

并且

$$0<\alpha_0\leqslant \alpha(v,u)\leqslant c_1(1+|v|^r+|u|^r), \quad r\in[0,4),$$

则对给定的满足 $M_1\tau \leqslant \varepsilon$ 的 ε, $\tau > 0$, 其中 M_1 为适当大的正常数, 柯西问题 (14.5.1)–(14.5.2) 的整体光滑解 $(v^{\varepsilon,\tau}, u^{\varepsilon,\tau})$ 存在唯一且满足

$$v_1 \leqslant v^{\varepsilon,\tau} \leqslant C(\varepsilon,\tau), \quad |u^{\varepsilon,\tau}| \leqslant C(\varepsilon,\tau), \tag{14.5.3}$$

其中, 常数 $C(\varepsilon,\tau) > 0$ 与 ε, τ 有关;

(II) 设 (I) 中的条件全部得到满足且 $|v-\bar{v}|^{p-2}/\alpha(v,u)$ 在 $v \geqslant v_1$ 时有限, 则 $\|v^{\varepsilon,\tau}(\cdot,t)-\bar{v}\|_{L^p} \leqslant M$;

(III) 设 (I), (II) 中的条件全部得到满足且 $|h(v)| \leqslant c_3(1+|v|^k)$, $p > k \geqslant 1$. 若 $\tau = o(\varepsilon)$ $(\varepsilon \to 0)$, 则存在子列 $\{(v^{\varepsilon,\tau}, u^{\varepsilon,\tau})\}$ 使得当 $\varepsilon \to 0$ 时几乎处处收敛于 (v,u), 其中 (v,u) 是由 $h(v)$ 与 $v_0(x)$ 唯一确定的平衡态 (见定理 14.1.2 中的 (F_1), (F_2)).

证明　我们只证明一些必要的估计式, 它们与 (14.4.1) 中的估计式相似. 其余部分可类似于定理 14.1.2 的证明完成.

分别用 (w_v, w_u) 与 (z_v, z_u) 乘系统 (14.5.1) 得

$$\begin{cases} w_t + \lambda_2 w_x + \dfrac{1}{\tau}\alpha(v,u)(u-h(v)) = \varepsilon w_{xx} + \varepsilon(\sqrt{-g'(v)})' v_x^2 \leqslant \varepsilon w_{xx}, \\ z_t + \lambda_1 z_x + \dfrac{1}{\tau}\alpha(v,u)(u-h(v)) = \varepsilon z_{xx} - \varepsilon(\sqrt{-g'(v)})' v_x^2 \leqslant \varepsilon z_{xx}. \end{cases} \tag{14.5.4}$$

若 $-\int_{v_1}^{v}\sqrt{-g'(v)}\mathrm{d}v \leqslant h(v) \leqslant \int_{v_1}^{v}\sqrt{-g'(v)}\mathrm{d}v$ $(v \geqslant v_1)$, 则曲线 $u = h(v)$ $(v \geqslant v_1)$ 落在区域 Σ_{12} 之中, 如图 14.3 所示. 于是直接由不等式 (14.5.4) 可推出 Σ_{12} 是系统 (14.5.1) 的一个不变域. 据此, 有下述估计:

$$v \geqslant v_1, \quad |u| \leqslant \int_{v_1}^{v}\sqrt{-g'(v)}\mathrm{d}v. \tag{14.5.5}$$

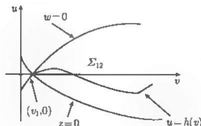


图 14.3　系统 (14.5.1) 的不变域

令

$$p(v,u) = \frac{u^2}{2} - h(v)u + 4\int_{v_1}^{v}\int_{v_1}^{s}\left(|h''(m)|\int_{v_1}^{m}\sqrt{-g'(n)}\mathrm{d}n + h'(m)^2 + 1\right)\mathrm{d}m\mathrm{d}s, \tag{14.5.6}$$

$$\bar{p}(v,u)=p(v,u)-p(\bar{v},\bar{u})-p_v(\bar{v},\bar{u})(v-\bar{v})-p_u(\bar{v},\bar{u})(u-\bar{u}), \tag{14.5.7}$$

用 $(\bar{p}_v,\bar{p}_u)$ 乘系统 (14.5.1), 则利用 (14.2.4), (14.2.5) 有

$$\begin{aligned}&\bar{p}(v,u)_t+\bar{q}(v,u)_x+(-h'(v)u_x+\bar{p}_{vv}(v,u)v_x)(u-h(v))\\&+h'(v)^2(u-h(v))v_x+g'(v)(u-h(v))v_x+\frac{1}{\tau}\alpha(v,u)(u-h(v))^2\\=&\,\varepsilon p_{xx}(v,u)-\varepsilon(p_{vv}(v,u)v_x^2+2\bar{p}_{vu}(v,u)v_xu_x+p_{uu}(v,u)u_x^2),\end{aligned} \tag{14.5.8}$$

其中

$$\begin{aligned}\bar{q}(v,u)=&-\bar{p}_v(v,u)(u-h(v))-\int_{v_1}^{v}\bar{p}_v(s,h(s))h'(s)\mathrm{d}s\\&+\int_{v_1}^{v}\bar{p}_u(s,h(s))g'(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

从 (14.5.6), (14.5.7) 及 (14.5.5) 中的第二个估计式可推出

$$\begin{aligned}&\bar{p}_{vv}(v,u)v_x^2+2\bar{p}_{vu}(v,u)v_xu_x+\bar{p}_{uu}(v,u)u_x^2\\&\geqslant C_2\left[\left(|h''(v)|\int_{v_1}^{v}\sqrt{-g'(s)}\mathrm{d}s+h'(v)^2+1\right)v_x^2+u_x^2\right]\end{aligned}$$

对某个常数 $C_2>0$ 成立, 所以利用 (14.5.8) 与 (I) 中的条件立即得到

$$\begin{aligned}&\bar{p}_t(v,u)+\bar{q}_x(v,u)+\frac{1}{2\tau}\alpha(v,u)(u-h(v))^2\\&+(\varepsilon C_2-M\tau)\left[\left(|h''(v)|\int_{v_1}^{v}\sqrt{-g'(s)}\mathrm{d}s+h'(v)^2+1\right)v_x^2+u_x^2\right]\\\leqslant&\,\varepsilon\bar{p}_{xx}(v,u).\end{aligned}$$

这蕴涵着

$$\begin{cases}\|(v(\cdot,t)-\bar{v},u(\cdot,t)-\bar{u})\|_{L^2(\mathbb{R})}+\left\|\dfrac{\alpha(v,u)(u-h(v))^2}{\tau}\right\|_{L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)}\leqslant M,\\\left\|\varepsilon\left(|h''(v)|\displaystyle\int_{v_1}^{v}\sqrt{-g'(s)}\mathrm{d}s+h'(v)^2+1\right)v_x^2+\varepsilon u_x^2\right\|_{L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)}\leqslant M,\end{cases}$$

如果 $2M\tau\leqslant\varepsilon C_2$. 然后用定理 14.1.2 的证明方法可得到先验估计 (14.5.3) 及其余部分的证明. 证毕. □

14.5.2 交通流模型: L^p 解

考虑带松弛项的交通流模型

$$\begin{cases}\rho_t+(\rho u)_x=\varepsilon\rho_{xx},\\u_t+\left(\dfrac{u^2}{2}+g(\rho)\right)_x+\dfrac{1}{\tau}\alpha(\rho,u)(u-h(\rho))=\varepsilon u_{xx}\end{cases} \tag{14.5.9}$$

带可测初值

$$(\rho(x,0),u(x,0))=(\rho_0(x),u_0(x))(\rho_0(x)\geqslant 0) \tag{14.5.10}$$

的黏性解, 其中初值 $(\rho_0(x),u_0(x))$ 满足

$$(\rho_0(x)-\bar{\rho},u_0(x)-\bar{u})\in L^\infty(\mathbb{R})\cap L^p(\mathbb{R}),\quad 1<p<\infty,$$

其中, $\bar{\rho}>0$ 与 u 都是常数, 且 $\bar{u}=h(\bar{\rho})$.

对于交通流模型来说, $g(\rho)=\ln\rho$. 如果 $g'(\rho)/\rho$ 是单调非增函数, 那么一般说来, 系统 (14.5.9) 的解没有先验 L^∞ 估计. 我们在 L^p 空间中研究柯西问题 (14.5.9) (14.5.10) 的黏性解 $(\rho^{\varepsilon,\tau},u^{\varepsilon,\tau})$ 的紧性.

相应的双曲系统 (14.3.10) 的两个特征值为

$$\lambda_1=u-\sqrt{\rho g'(\rho)},\quad \lambda_2=u+\sqrt{\rho g'(\rho)},$$

其相应的两个黎曼不变量为

$$z(\rho,u)=u+\int_{\rho_1}^{\rho}\sqrt{g'(s)/s}\,\mathrm{d}s,\quad w(\rho,u)=u-\int_{\rho_1}^{\rho}\sqrt{g'(s)/s}\,\mathrm{d}s,$$

其中, 常数 $\rho_1\in(0,\bar{\rho}]$ 是常数.

为了叙述方便, 我们作些假设:

(C_1) 当 $\rho\geqslant\rho_1$ 时, $g'(\rho)>0$, $(g'(\rho)/\rho)'\leqslant 0$;

(C_2) $0<\alpha_0\leqslant\alpha(\rho,u)\leqslant c_1+c_2(|\rho|^r+|u|^r),\quad 0\leqslant r<4$;

(C_3) $\dfrac{(\rho h'(\rho))^2+h(\rho)^2+g'^2(\rho)+\rho^2+u^2+\rho^2|h''(\rho)|\int_{\rho_1}^{\rho}\sqrt{g'(s)/s}\,\mathrm{d}s}{\alpha(\rho,u)}$ 在 $|u|\leqslant\int_{\rho_1}^{\rho}\sqrt{g'(s)/s}\,\mathrm{d}s$ 时有界;

(C_4) $\rho^p/\alpha(\rho,u)\leqslant M$;

(C_5) $|h(\rho)|\leqslant c_3+c_4|\rho|^k,\quad k\geqslant 1$.

定理 14.5.2　*如果当 $\rho\geqslant\rho_1$ 时有*

$$\int_{\rho_1}^{\rho}\sqrt{g'(s)/s}\,\mathrm{d}s\leqslant h(\rho)\leqslant\int_{\rho_1}^{\rho}\sqrt{g'(s)/s}\,\mathrm{d}s,$$

且初值 $(\rho_0(x),u_0(x))$ 落在闭域 $\Sigma=\{(\rho,u):w(\rho,u)\leqslant 0,\ z(\rho,u)\geqslant 0\}$ 之中, 那么

(I) 若 $(C_1)\sim(C_3)$ 成立, 则对给定的满足 $M_1\tau\leqslant\varepsilon$ 的 $\varepsilon,\ \tau>0$, 其中 M_1 为适当大的正常数, 柯西问题 (14.5.9) (14.5.10) 的整体光滑解存在唯一且满足

$$\rho_1\leqslant\rho^{\varepsilon,\tau}\leqslant C(\varepsilon,\tau),\quad |u^{\varepsilon,\tau}|\leqslant C(\varepsilon,\tau), \tag{14.5.11}$$

其中, 常数 $C(\varepsilon,\tau)>0$ 与 ε, τ 有关.

(II) 若 $(C_1)\sim(C_4)$ 成立, 则 $\|\rho^{\varepsilon,\tau}(\cdot,t)-\bar{\rho}\|_{L^p(\mathbb{R})}\leqslant M$.

(III) 若 $(C_1)\sim(C_5)$ 全部成立且 $p>1+k$, 并且 $\tau=o(\varepsilon)\quad(\varepsilon\to 0)$, 则存在子列 $\{(\rho^{\varepsilon,\tau},u^{\varepsilon,\tau})\}$ 使得当 $\varepsilon\to 0$ 时几乎处处收敛于 (ρ,u), 其中极限函数 (ρ,u) 是由 $h(\rho)$ 与 $\rho_0(x)$ 唯一确定的平衡态 (见定理 14.1.2 中的 (F_1), (F_2)).

证明　与定理 14.5.1 的证明相似, 容易验证 Σ 是系统 (14.5.9) 的不变域, 从而有下述估计:

$$\rho\geqslant\rho_1,\quad |u|\leqslant\int_{\rho_1}^{\rho}\sqrt{g'(s)/s}\mathrm{d}s. \tag{14.5.12}$$

选取函数

$$\begin{aligned}p(\rho,u)=&\frac{u^2}{2}-h(\rho)u\\&+4\int_{\rho_1}^{\rho}\int_{\rho_1}^{m}(|h''(m)|\sqrt{g'(n)/n}\mathrm{d}n+(h')^2(m)+1)\mathrm{d}m\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

并令

$$\bar{p}(\rho,u)=p(\rho,u)-p(\bar{\rho},\bar{u})-p_\rho(\bar{\rho},\bar{u})(\rho-\bar{\rho})-p_u(\bar{\rho},\bar{u})(u-\bar{u}),$$

则用 $(\bar{p}_\rho,\bar{p}_u)$ 乘系统 (14.5.9), 我们可由条件 (C_3) 及 (14.5.12) 中的第二个估计式推出

$$\begin{cases}\|(\rho(\cdot,t)-\bar{\rho},u(\cdot,t)-\bar{u})\|_{L^2(\mathbb{R})}+\left\|\dfrac{\alpha(\rho,u)(u-h(\rho))^2}{\tau}\right\|_{L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)}\leqslant M,\\ \left\|\varepsilon\left(|h''(\rho)|\displaystyle\int_{\rho_1}^{\rho}\sqrt{g'(s)/s}\mathrm{d}s+h'(\rho)^2+1\right)\rho_x^2+\varepsilon u_x^2\right\|_{L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)}\leqslant M.\end{cases} \tag{14.5.13}$$

利用 (C_1), (C_2) 及 (14.5.13) 中的估计即可证得先验估计 (15.5.11), 从而 (I) 获得证明.

与方程组 (14.1.1) 相对应, 此时 $f(\rho,u)=\rho u$, $f_u(\rho,u)=\rho$, 所以利用 (14.4.3) 及 (C_4) 即可获得 (II) 的证明.

由于 $\rho^2/\alpha(\rho,u)$ 有界, 所以类似于定理 14.1.2 的证明, 我们可获得 (III) 的证明. 证毕. □

评　注

带松弛项的双曲守恒律系统的弱光滑行波与疏波之非线性稳定性最先由 Liu[95] 进行了分析, 他指出: 解在常值平衡态附近时, 松弛效应与黏性效应紧密相关 (也可

参阅文献 [93]). 简单的燃烧模型 (3.3.1) 带无限反应率 k (其倒数与零松弛相关) 的情形最早由 Lu[22] 应用补偿列紧理论进行了研究. 之后, Chen 和 Liu[82] 与 Chen 等[12] 应用补偿列紧方法系统地研究了带松弛项的双曲守恒律大振荡解的零松弛现象. 本章全部结果摘自文献 [3].

第 15 章　带刚性松弛项的双曲系统

本章考虑一维空间区域上一般拟线性 2×2 守恒律

$$\begin{cases} v_t + f(v,u)_x = 0, \\ u_t + g(v,u)_x + \dfrac{1}{\tau}(u - h(v)) = 0 \end{cases} \tag{15.0.1}$$

带初值

$$(v(x,0),u(x,0)) = (v_0(x),u_0(x)) \tag{15.0.2}$$

的松弛逼近解 (v^τ,u^τ) 的奇异极限.

系统 (15.0.1) 的特征值满足下述特征方程:

$$\lambda^2 - (f_v + g_u)\lambda + f_v g_u - g_v f_u = 0.$$

假设系统 (15.0.1) 双曲 (不必严格双曲), 即两个特征值或特征速度

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2}\left(f_v + g_u - \sqrt{(f_v - g_u)^2 + 4g_v f_u}\right), \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2}\left(f_v + g_u + \sqrt{(f_v - g_u)^2 + 4g_v f_u}\right) \end{aligned}$$

都是实数.

从形式上看, 当松弛时间 $\tau \to 0$ 时, 由 (15.0.1) 中的第二个方程可得 $u = h(v)$, 再由第一个方程即得下述标量守恒律即局部平衡方程:

$$v_t + f(v,h(v))_x = 0. \tag{15.0.3}$$

应用 Chapman-Enskog 展式, 可以发现当松弛逼近解靠近局部平衡曲线 $u = h(v)$ 时松弛过程的有效响应. 假设松弛变量 u^τ 能够用只包含局部宏观变量 v^τ 及其导数的渐近展开式刻画, 即

$$u^\tau = h(v^\tau) + \tau s^\tau(v^\tau, u^\tau, v^\tau_x, u^\tau_x, \cdots) + O(\tau^2).$$

为了计算出 s^τ 的表达式, 利用方程组 (15.0.1) 得

$$\begin{aligned} 0 &= v_t + f(v,u)_x \\ &= v_t + f(v,h(v) + \tau s + O(\tau^2))_x \\ &= v_t + f(v,h(v))_x + \tau(s f_u(v,h(v)))_x + O(\tau^2) \end{aligned} \tag{15.0.4}$$

和

$$\begin{aligned}0 &= u_t + g(v,u)_x + \frac{1}{\tau}(u-h(v))\\&= h(v)_t + g(v,h(v))_x + s + O(\tau)\\&= h'(v)v_t + \left(\frac{\mathrm{d}g(v,h(v))}{\mathrm{d}v}\right)v_x + s + O(\tau).\end{aligned} \tag{15.0.5}$$

这里已略去上标 τ. 利用等式 (15.0.4) 消去 (15.0.5) 中的 v_t 得

$$\begin{aligned}-s &= h'(v)\big(-f(v,h(v))\big)_x + \frac{\mathrm{d}g(v,h(v))}{\mathrm{d}v}\cdot v_x + O(\tau)\\&= \left(\frac{\mathrm{d}g(v,h(v))}{\mathrm{d}v} - h'(v)\frac{\mathrm{d}f(v,h(v))}{\mathrm{d}v}\right)v_x + O(\tau).\end{aligned} \tag{15.0.6}$$

由等式 (15.0.4) 与 (15.0.6), 在 $u=h(v)$ 上有

$$\begin{aligned}v_t + f(v,h(v))_x &= -\tau\big(sf_u(v,h(v))\big)_x + O(\tau^2)\\&= \tau\left(\left(\frac{\mathrm{d}g(v,h(v))}{\mathrm{d}v} - h'(v)\frac{\mathrm{d}f(v,h(v))}{\mathrm{d}v}\right)f_u(v,h(v))v_x\right)_x\\&= \tau\big(f_u(g_v + (g_u - f_v)h'(v) - f_u h'^2(v))v_x\big)_x.\end{aligned} \tag{15.0.7}$$

在 $u=h(v)$ 上, 令

$$\phi(v) = f_u[g_v + (g_u - f_v)h'(v) - f_u h'^2(v)],$$

则容易验证

$$\phi(v) = [\lambda_2(v,h(v)) - \lambda(v)][\lambda(v) - \lambda_1(v,h(v))], \tag{15.0.8}$$

其中, $\lambda(v) = \dfrac{\mathrm{d}f(v,h(v))}{\mathrm{d}v}$ 是平衡方程 (15.0.3) 的特征值.

事实上, 在 $u=h(v)$ 上, 有

$$\begin{aligned}&[\lambda_2(v,h(v)) - \lambda(v)][\lambda(v) - \lambda_1(v,h(v))]\\&= \left[\frac{1}{2}\big(f_v + g_u + \sqrt{(f_v-g_u)^2 + 4g_v f_u}\big) - f_v - f_u h'(v)\right]\\&\quad\times\left[f_v + f_u h'(v) - \frac{1}{2}\big(f_v + g_u - \sqrt{(f_v-g_u)^2 + 4g_v f_u}\big)\right]\\&= \left[\frac{1}{2}\sqrt{(f_v-g_u)^2 + 4g_v f_u} - \left(\frac{1}{2}(f_v - g_u) + f_u h'(v)\right)\right]\\&\quad\times\left[\frac{1}{2}\sqrt{(f_v-g_u)^2 + 4g_v f_u} + \left(\frac{1}{2}(f_v - g_u) + f_u h'(v)\right)\right]\\&= f_u[g_v + (g_u - f_v)h'(v) - f_u h'^2(v)].\end{aligned}$$

因此, 若次特征场条件

$$\lambda_1(v,h(v)) \leqslant \lambda(v) \leqslant \lambda_2(v,h(v)) \tag{15.0.9}$$

得到满足, 则方程 (15.0.7) 是稳定的退化抛物型方程.

现在给出松弛系统 (15.0.1) 的熵–熵流 $(\eta(v,u),q(v,u))$ 的定义:

定义 15.0.1　一对函数 $(\eta(v,u),q(v,u))$ 称为系统 (15.0.1) 的熵–熵流, 如果

(e_1) $(q_v,q_u)=(f_v\eta_v+g_v\eta_u, f_u\eta_v+g_u\eta_u)$,

(e_2) $\eta_u(v,h(v))=0$.

熵 $\eta(v,u)$ 称为凸熵, 如果

(e_3) 存在非负函数 $c(v,u)$ 使得对任意非零向量 $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ 有

$$\eta_{vv}a^2+2\eta_{vu}ab+\eta_{uu}b^2 \geqslant c(v,u)(a^2+b^2).$$

(e_4) 若 $c(v,u)\geqslant c_0>0$, 其中 c_0 是常数, 则熵 $\eta(v,u)$ 称为严格凸熵.

从 (e_1) 中的熵–熵流方程组中消去 q 即得 (15.0.1) 的熵方程:

$$g_v\eta_{uu}-f_u\eta_{vv}+(f_v-g_u)\eta_{vu}=0. \tag{15.0.10}$$

若 f_u, g_v 以及 f_v-g_u 有公共零因子 $Z(v,u)$, 则在 (15.0.10) 中除以这个因子而把系统 (15.0.1) 的熵视为方程

$$\frac{g_v}{Z(v,u)}\eta_{uu}-\frac{f_u}{Z(v,u)}\eta_{vv}+\frac{f_v-g_u}{Z(v,u)}\eta_{vu}=0 \tag{15.0.11}$$

的解. 例如, 考虑推广的交通流模型的松弛问题:

$$\begin{cases} \rho_t+(\rho u)_x=0, \\ u_t+\left(\dfrac{u^2}{2}+p(\rho)\right)_x+\dfrac{u-h(\rho)}{\tau}=0, \end{cases} \tag{15.0.12}$$

它在直线 $\rho=0$ 上非严格双曲. 此时 ρ 是 $f_u(\rho,u)=\rho$, $g_\rho(\rho,u)=p'(\rho)$ 以及 $f_\rho(\rho,u)-g_u(\rho,u)=0$ 的一个公共零因子.

我们将先给带刚性松弛项的一般 2 × 2 系统 (15.0.1) 的奇异极限建立一个紧性框架; 然后把这个紧性框架应用于推广的交通流模型的研究.

15.1　2 × 2 系统的松弛极限

在介绍一般 2 × 2 松弛系统 (15.0.1) 的奇异极限的紧性框架之前, 我们先证明两个基本引理.

引理 15.1.1　*设 (η,q) 是由上述 $(e_1)\sim(e_4)$ 定义的系统 (15.0.1) 的严格凸熵–熵流, 则局部平衡方程 (15.0.3) 有个严格凸熵 $l(v)=\eta(v,h(v))$ 及其相应的熵流 $L(v)=q(v,h(v))$.*

证明　函数 $l(v)$ 显然是方程 (15.0.3) 的熵, 因为它是标量方程. 经过简单计算, 我们有

$$\begin{aligned}l''(v)&=\eta_{vv}(v,h(v))+2\eta_{vu}(v,h(v))h'(v)+\eta_{uu}(v,h(v))(h'(v))^2\\&\geqslant c_0(1+(h'(v))^2)\geqslant c_0>0,\end{aligned}$$

因而 $l(v)$ 是严格凸的.

为了证明 $L(v)=q(v,h(v))$ 是相应的熵流, 利用方程组 (e_1)–(e_2) 中的条件可得

$$\begin{aligned}q_v(v,h(v))&=\eta_v(v,h(v))f_v(v,h(v)),\\q_u(v,h(v))&=\eta_v(v,h(v))f_u(v,h(v)).\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}L'(v)&=q_v(v,h(v))+q_u(v,h(v))h'(v)\\&=\eta_v(v,h(v))f_v(v,h(v))+\eta_v(v,h(v))f_u(v,h(v))h'(v)\\&=\eta_v(v,h(v))\frac{\mathrm{d}f(v,h(v))}{\mathrm{d}v},\end{aligned}$$

因而 $L(v)$ 是相应于 $l(v)$ 的熵流. 证毕. □

引理 15.1.2　*设 $l(v)$ 是局部平衡方程 (15.0.3) 的严格凸熵, 且在 $u=h(v)$ 上, 稳定性准则 (15.0.9) 成立. 如果*

$$\frac{[\lambda_2(v,h(v))-\lambda(v)][\lambda(v)-\lambda_1(v,h(v))]}{Z^2(v,u)}>0,\quad \frac{f_u(v,u)}{Z(v,u)}\neq 0,\tag{15.1.1}$$

其中, $Z(v,u)$ 是如同 (15.0.11) 中给出的零因子, 那么在某个包含局部平衡曲线 $u=h(v)$ 的开区域 $D_l\subset\mathbb{R}^2$ 中, 系统 (15.0.1) 有个严格凸熵 $\eta(v,u)$ 满足 $\eta(v,h(v))=l(v)$.

证明　若 $\eta(v,u)$ 是系统 (15.0.1) 的严格凸熵, 则它一定满足

(E_1) $\dfrac{g_v}{Z(v,u)}\eta_{uu}+\dfrac{f_v-g_u}{Z(v,u)}\eta_{vu}-\dfrac{f_u}{Z(v,u)}\eta_{vv}=0;$

(E_2) $\eta_u(v,u)(u-h(v))\geqslant 0;$

(E_3) $\eta_{uu}\geqslant c_1$, $\eta_{vv}\eta_{uu}-\eta_{vu}^2\geqslant c_2$ 对两个适当的正常数 c_1, c_2 成立.

方程 (E_1) 的特征曲线 $u=e(v)$ 满足下述特征方程:

$$\frac{g_v}{Z(v,u)}+\frac{f_v-g_u}{Z(v,u)}e'(v)-\frac{f_u}{Z(v,u)}e'^2(v)=0.$$

因此, 若引理 15.1.2 中的条件 (15.1.1) 得到满足, 则

$$
\begin{aligned}
&\frac{g_v}{Z(v,u)}+\frac{f_v-g_u}{Z(v,u)}h'(v)-\frac{f_u}{Z(v,u)}h'^2(v)\\
&=\frac{[\lambda_2(v,h(v))-\lambda(v)][\lambda(v)-\lambda_1(v,h(v))]}{Z(v,u)^2}\cdot\frac{Z(v,u)}{f_u(v,u)}\neq 0,
\end{aligned}
$$

因而 $u=h(v)$ 不是特征曲线. 所以根据经典的 Cauchy-Kowalewsky 局部存在性理论, 二阶线性双曲方程 (E_1) 带初值

$$
\eta(v,h(v))=l(v),\quad \eta_u(v,h(v))=0 \tag{15.1.2}
$$

的柯西问题在某个包含局部平衡曲线 $u=h(v)$ 的开区域 D_l 中有个局部解 $\eta(v,u)$.

由 (E_3) 容易得到 (E_2). 事实上, 若 (E_3) 成立, 则

$$
\eta_u(v,u)(u-h(v))=\eta_{uu}(v,\alpha)(u-h(v))^2\geqslant 0,
$$

其中, α 在 u 与 $h(v)$ 之间取值.

若 (E_3) 中的严格凸性沿着局部平衡曲线成立, 则由连续性, 它们在开区域 D_l (或许更小一点的开区域) 中也成立.

把初值 (15.1.2) 对 v 求导, 我们有

$$
\begin{aligned}
l'(v)&=\eta_v(v,h(v))+\eta_u(v,h(v))h'(v)=\eta_v(v,h(v)),\\
&\eta_{uv}(v,h(v))+\eta_{uu}(v,h(v))h'(v)=0.
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
l''(v)&=\eta_{vv}(v,h(v))+\eta_{vu}(v,h(v))h'(v),\\
\eta_{uv}(v,h(v))&=-\eta_{uu}(v,h(v))h'(v).
\end{aligned} \tag{15.1.3}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\eta_{vv}(v,h(v))&=l''(v)-\eta_{vu}(v,h(v))h'(v)\\
&=l''(v)+\eta_{uu}(v,h(v))h'^2(v).
\end{aligned}
$$

这与 (E_1) 相结合就得到: 在 $u=h(v)$ 上有

$$
\begin{aligned}
0&=\frac{1}{Z}\left[g_v\eta_{uu}-f_u\eta_{vv}+(f_v-g_u)\eta_{vu}\right]\\
&=\frac{1}{Z}\left[g_v-(f_v-g_u)h'(v)-f_uh'^2(v)\right]\eta_{uu}-\frac{f_u}{Z}l''(v),
\end{aligned}
$$

或者等价地

$$
\begin{aligned}
\frac{f_u^2}{Z^2}l''(v)&=\frac{1}{Z^2}\left[f_u\left(g_v\eta_{uu}-f_u\eta_{vv}+(f_v-g_u)\eta_{vu}\right)\eta_{uu}\right]\\
&=\frac{[\lambda_2(v,h(v))-\lambda(v)][\lambda(v)-\lambda_1(v,h(v))]}{Z^2(v,u)}\eta_{uu}(v,h(v)).
\end{aligned}
$$

所以由 (15.1.1) 中的条件即得 $\eta_{uu}(v,h(v))>0$.

另外, 由等式 (15.1.3) 得

$$h'(v)=-\frac{\eta_{vu}(v,h(v))}{\eta_{uu}(v,h(v))}.$$

把它代入恒等式 (15.0.8), 并利用熵方程 (15.0.10), 我们有

$$\begin{aligned}&\frac{[\lambda_2(v,h(v))-\lambda(v)][\lambda(v)-\lambda_1(v,h(v))]}{Z^2(v,u)}\\=&\frac{f_u[g_v+(g_u-f_v)h'(v)-f_uh'^2(v)]}{Z^2(v,u)}\\=&\frac{g_v-(g_u-f_v)\dfrac{\eta_{vu}}{\eta_{uu}}-f_u\left(\dfrac{\eta_{vu}}{\eta_{uu}}\right)^2}{Z^2(v,u)}\cdot f_u\\=&\frac{f_u^2}{\eta_{uu}^2Z^2(v,u)}(\eta_{uu}\eta_{vv}-\eta_{uv}^2)\end{aligned}$$

在 $u=h(v)$ 上成立. 因此在 $u=h(v)$ 上有 $\eta_{uu}\eta_{vv}-\eta_{uv}^2>0$. 这就完成了引理 15.1.2 的证明. □

现在给出本节的主要结果. 假设 $(v^{\tau,\varepsilon},u^{\tau,\varepsilon})\in D_l$ 是柯西问题

$$\begin{cases}v_t+f(v,u)_x=\varepsilon v_{xx},\\u_t+g(v,u)_x+\dfrac{1}{\tau}(u-h(v))=\varepsilon u_{xx}\end{cases}\tag{15.1.4}$$

带有界初值

$$(v(x,0),u(x,0))=(v_0(x),u_0(x))\in D_l$$

的解, 其中 D_l 是引理 15.1.2 中给出的开区域, 并且

$$(v^{\tau,\varepsilon},u^{\tau,\varepsilon})\xrightarrow{\text{a.e.}}(v^\tau,u^\tau)\quad(\varepsilon\to0),$$

极限函数 (v^τ,u^τ) 是柯西问题 (15.0.1)–(15.0.2) 在开区域 D_l 内的弱解, 则有下述定理.

定理 15.1.1　*如果引理 15.1.2 中的假设全部成立, 并且*

$$\text{meas}\{v:\lambda(v)=0\}=0,$$

那么存在子列 $\{(v^\tau,u^\tau)\}$ 使得

$$(v^\tau,u^\tau)\xrightarrow{\text{a.e.}}(v,u)\quad(\tau\to0),$$

其中极限函数 (v,u) 满足

(1) $u(x,t)=h(v(x,t))$ 在 $\mathbb{R}\times(0,\infty)$ 上几乎处处成立;

(2) $v(x,t)$ 是方程 (15.0.3) 带初值 $v(x,0)=v_0(x)$ 的柯西问题的弱解.

证明　设 $\eta(v,u)$ 是由引理 15.1.2 给出的系统 (15.0.1) 的严格凸熵, $q(v,u)$ 是其相应的熵流, 则存在正常数 c_0 使得对任何非零向量 $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ 有

$$\eta_{vv}a^2+2\eta_{vu}ab+\eta_{uu}b^2\geqslant c_0(a^2+b^2). \tag{15.1.5}$$

因为在 D_l 内, $\eta_{uu}(v,u)\geqslant c_1>0$, $\eta_u(v,h(v))=0$, 所以有

$$\eta_u(v,u)(u-h(v))=\eta_{uu}(v,\alpha)(u-h(v))^2\geqslant c_1(u-h(v))^2, \tag{15.1.6}$$

其中, α 表示 u 与 $h(v)$ 之间的一个值.

用 (η_v,η_u) 乘系统 (15.1.4) 得

$$\begin{aligned}&\eta_t+q_x+\frac{\eta_u}{\tau}(u-h(v))\\=&\varepsilon\eta_{xx}-\varepsilon\big(\eta_{vv}v_x^2+2\eta_{vu}v_xu_x+\eta_uu_x^2\big),\end{aligned}$$

从而由不等式 (15.1.5), (15.1.6) 得

$$\eta_t+q_x+\frac{c_1}{\tau}(u-h(v))^2+\varepsilon c_0\big(v_x^2+u_x^2\big)\leqslant\varepsilon\eta_{xx}. \tag{15.1.7}$$

把 (15.1.7) 乘以一个适当的试验函数, 并在 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ 上积分, 有

$$\varepsilon\big[(v_x^{\tau,\varepsilon})^2+(u_x^{\tau,\varepsilon})^2\big]\in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+) \tag{15.1.8}$$

以及

$$\frac{1}{\tau}\big[u^{\tau,\varepsilon}-h(v^{\tau,\varepsilon})\big]^2\in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+). \tag{15.1.9}$$

在式 (15.1.9) 中令 $\varepsilon\to 0$ 即得

$$\frac{1}{\tau}\big(u^{\tau}-h(v^{\tau})\big)^2\in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+). \tag{15.1.10}$$

设 $L_1(v)$, $L_2(v)$ 是平衡方程 (15.0.3) 的分别相应于熵 $l_1(v)=v$, $l_2(v)=f(v,h(v))=f(v)$ 的熵-熵流. 此外, 设系统 (15.0.1) 的分别带初值 $l(v)=l_1(v)$ 与 $l(v)=l_2(v)$ 的熵是 $\eta_1(v,u)$, $\eta_2(v,u)$ (见式 (15.1.2)), 其相应的熵流分别是 $q_1(v,u)$, $q_2(v,u)$.

用 (η_{iv},η_{iu}) $(i=1,2)$ 乘方程组 (15.1.4) 得

$$\begin{aligned}&\eta_i(v^{\tau,\varepsilon},u^{\tau,\varepsilon})_t+q_i(v^{\tau,\varepsilon},u^{\tau,\varepsilon})_x+\frac{\eta_{iu}}{\tau}\big(u^{\tau,\varepsilon}-h(v^{\tau,\varepsilon})\big)\\=&\varepsilon\eta_i(v^{\tau,\varepsilon},u^{\tau,\varepsilon})_{xx}-\varepsilon\big[\eta_{ivv}(v_x^{\tau,\varepsilon})^2+2\eta_{iuv}v_x^{\tau,\varepsilon}u_x^{\tau,\varepsilon}+\eta_{iuu}(u_x^{\tau,\varepsilon})^2\big],\end{aligned}$$

所以

$$
\begin{aligned}
& l_i(v^{\tau,\varepsilon})_t + L_i(v^{\tau,\varepsilon})_x \\
= & \left(l_i(v^{\tau,\varepsilon}) - \eta_i(v^{\tau,\varepsilon}, u^{\tau,\varepsilon})\right)_t + \left(L_i(v^{\tau,\varepsilon}) - q(v^{\tau,\varepsilon}, u^{\tau,\varepsilon})\right)_x \\
& - \frac{\eta_{iuu}(v^{\tau,\varepsilon}, \beta)}{\tau}\left(u^{\tau,\varepsilon} - h(v^{\tau,\varepsilon})\right)^2 + \varepsilon \eta_i(v^{\tau,\varepsilon}, u^{\tau,\varepsilon})_{xx} \\
& - \varepsilon\left[\eta_{ivv}(v_x^{\tau,\varepsilon})^2 + 2\eta_{iuv} v_x^{\tau,\varepsilon} u_x^{\tau,\varepsilon} + \eta_{iuu}(u_x^{\tau,\varepsilon})^2\right],
\end{aligned} \tag{15.1.11}
$$

其中, β 在 $u^{\tau,\varepsilon}$ 与 $h(v^{\tau,\varepsilon})$ 之间取值.

从 (15.1.8) 可推出 $\varepsilon\eta_i(v^{\tau,\varepsilon}, u^{\tau,\varepsilon})_{xx}$ 当 $\varepsilon \to 0$ 时在分布意义下趋于零. 于是在等式 (15.1.11) 中令 $\varepsilon \to 0$, 有

$$
l_i(v^\tau)_t + L_i(v^\tau)_x = I_{i1}^\tau + I_{i2}^\tau + I_{i3}^\tau + I_{i4}^\tau \tag{15.1.12}
$$

在分布意义下成立, 其中 I_{i3}^τ, I_{i4}^τ 分别是

$$
-\frac{\eta_{iuu}(v^{\tau,\varepsilon}, \alpha)}{\tau}\left(u^{\tau,\varepsilon} - h(v^{\tau,\varepsilon})\right)^2
$$

与

$$
-\varepsilon\left[\eta_{ivv}(v_x^{\tau,\varepsilon})^2 + 2\eta_{iuv} v_x^{\tau,\varepsilon} u_x^{\tau,\varepsilon} + \eta_{iuu}(u_x^{\tau,\varepsilon})^2\right]
$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时的弱极限. 由 (15.1.8)–(15.1.9) 知它们在 $L_{\rm loc}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中有界, 从而对某个常数 $1 < p < 2$ 在 $W_{\rm loc}^{-1,p}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中紧. 另外

$$
\begin{aligned}
\|I_{i1}^\tau\|_{H_{\rm loc}^{-1}} &= \sup_{\Phi\in H_0^1}\left|\int\int\left(l_i(v^\tau) - \eta_i(v^\tau, u^\tau)\right)_t \Phi \mathrm{d}x\mathrm{d}t\right| / \|\Phi\|_{H_0^1} \\
&\leqslant C\|u^\tau - h(v^\tau)\|_{L_{\rm loc}^2} \\
&\leqslant \sqrt{\tau}C \to 0 \quad (\tau \to 0),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|I_{i2}^\tau|_{H_{\rm loc}^{-1}} &= \sup_{\Phi\in H_0^1}\left|\int\int\left(L_i(v^\tau) - q_i(v^\tau, u^\tau)\right)_x \Phi \mathrm{d}x\mathrm{d}t\right| / \|\Phi\|_{H_0^1} \\
&= \sup_{\Phi\in H_0^1}\left|\int\int\left(q_i(v^\tau, h(v^\tau)) - q_i(v^\tau, u^\tau)\right)_x \Phi \mathrm{d}x\mathrm{d}t\right| / \|\Phi\|_{H_0^1} \\
&\leqslant C\|u^\tau - h(v^\tau)\|_{L_{\rm loc}^2} \\
&\leqslant \sqrt{\tau}C \to 0 \quad (\tau \to 0),
\end{aligned}
$$

所以 I_{i1}^τ, I_{i2}^τ 在 $W_{\rm loc}^{-1,2}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中紧, 因而

$$
l_i(v^\tau)_t + L_i(v^\tau)_x
$$

在 $W_{\mathrm{loc}}^{1,p}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中紧. 从 (v^τ,u^τ) 的一致有界性可知 $l_i(v^\tau)_t+L_i(v^\tau)_x$ 在 $W_{\mathrm{loc}}^{-1,\infty}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中有界, 故由定理 2.3.1, $l_i(v^\tau)_t+L_i(v^\tau)_x$ 在 $W_{\mathrm{loc}}^{-1,2}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中紧.

因此, 利用第 3 章中的紧性框架即得 $\{v^\tau\}$ 的强收敛性: $v^\tau \xrightarrow{\text{a.e.}} v$; 而由 (15.1.10), 这蕴涵着 $\{u^\tau\}$ 的强收敛性: $u^\tau \xrightarrow{\text{a.e.}} u$. 所以定理 15.1.1 获得证明. □

15.2 推广的交通流模型

本节介绍定理 15.1.1 在推广的交通流模型即非严格双曲的系统 (15.0.12) 带初值

$$(\rho(x,0),u(x,0))=(\rho_0(x),u_0(x))\quad(\rho_0(x)\geqslant 0) \tag{15.2.1}$$

的松弛问题中的应用.

系统 (15.0.12) 的两个特征值为

$$\lambda_1=u-\sqrt{\rho p'(\rho)},\quad \lambda_2=u+\sqrt{\rho p'(\rho)},$$

相应于 (15.0.7) 的一阶松弛修正为

$$\rho_t+(\rho h(\rho))_x=\tau\big(\phi(\rho)\rho_x\big)_x,$$

其中, $\phi(\rho)=\rho^2\left(\dfrac{p'(\rho)}{\rho}-h'^2(\rho)\right)$, 因而次特征场条件 (15.0.9) 简化为

$$\frac{p'(\rho)}{\rho}-h'^2(\rho)>0.$$

系统 (15.0.12) 的熵方程为

$$\frac{p'(\rho)}{\rho}\eta_{uu}-\eta_{\rho\rho}=0,$$

这是由于 $f_u(\rho,u)=\rho,\ g_\rho(\rho,u)=p'(\rho)$ 与 $f_\rho(\rho,u)-g_u(\rho,u)=0$ 有个公共零因子 ρ, 如果我们假设 $\dfrac{p'(\rho)}{\rho}\geqslant d>0$. 因此, 把定理 15.1.1, 定理 10.2.1 以及定理 14.3.3 相结合就产生下述定理.

定理 15.2.1 *设 $p_1(\rho)=p'(\rho)/\rho\geqslant d>h'^2(\rho)$ 对某个正常数 d 成立, 且 $p_1'(\rho)\geqslant 0$. 如果存在两个小正数 N, L 使得曲线 $u=h(\rho)$ 经过曲线 $w=N$ 与 $z=-L$ 的唯一交点 (ρ,u), 且曲线段 $u=h(\rho)$ $(0\leqslant\rho\leqslant\bar\rho)$ 与初值 $(\rho_0(x),u_0(x))$ 都落在闭域*

$$\Sigma_{11}=\{(\rho,u):w\leqslant N,z\geqslant -L,\rho\geqslant 0\}$$

之中, 如图 14.2 所示, 那么对任意给定的 $\tau>0$, 柯西问题 (15.0.12) (15.2.1) 存在整体弱解 (ρ^τ,u^τ). 进一步, 若

$$\mathrm{meas}\{\rho:(\rho h(\rho))''=0\}=0,$$

则存在子列 $\{(\rho^\tau, u^\tau)\}$ 使得

$$(\rho^\tau, u^\tau) \xrightarrow{\text{a.e.}} (\rho, u) \quad (\tau \to 0),$$

其中极限函数 (ρ, u) 满足

(1) $u(x,t) = h(\rho(x,t))$ 在 $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ 上几乎处处成立;

(2) $\rho(x,t)$ 是标量方程

$$\rho_t + (\rho h(\rho))_x = 0$$

带有界初值 $\rho(x,0) = \rho_0(x)$ 的柯西问题的唯一弱解.

评　注

论文 [12] 创建了关于带刚性松弛项的一般 2×2 严格双曲系统 (15.0.1) 的奇异极限的紧性框架, 并据此得到了弹性力学系统松弛逼近解的奇异极限.

Chen-Levermore-Liu 的紧性框架在带松弛项的 2×2 非严格双曲系统中的推广即定理 15.1.1 及其在推广的交通流模型 (15.0.12) 中的应用均由 Lu 在文献 [96] 中给出.

第 16 章　由多个方程组成的双曲系统的松弛极限

本章主要讨论由三个方程组成的非线性系统

$$\begin{cases} v_t - u_x = 0, \\ u_t - \sigma(v,s)_x = 0, \\ s_t + c_1 s_x + \beta \dfrac{s-h(v)}{\tau} = 0 \end{cases} \tag{16.0.1}$$

带初值

$$(v(x,0), u(x,0), s(x,0)) = (v_0(x), u_0(x), s_0(x)) \tag{16.0.2}$$

的奇异极限, 其中 β, τ 以及 c_1 均为非负常数. 当 $\beta = 0$ 时, 柯西问题 (16.0.1)–(16.0.2) 的整体 L^2 弱解的存在性已在 12.3 节得到.

当 $\beta > 0$ 时, 例如 $\beta = 1$ 时, 系统 (16.0.1) 可以作为化学反应流的模型 (见文献 [80]). 这里 v 是比容, u 表示速度, s 是双模气体中一种气体的质量分数, $h(v)$ 是给定的平衡分布. 在这种情形下, τ 表示反应时间或松弛时间.

系统 (16.0.1) 源于许多物理现象, 如通过多孔介质的绝热气体流系统, Broadwell 模型的不变系统 (见文献 [97]), 以及黏弹性物质的等温运动系统 (见文献 [98, 99]). 从形式上看, 当松弛实间 $\tau \to 0$ 时, 它就生成弹性力学系统或等温弹性动力学方程组:

$$\begin{cases} v_t - u_x = 0, \\ u_t - \sigma(v, h(v))_x = 0. \end{cases} \tag{16.0.3}$$

系统 (16.0.1) 的三个特征值是

$$\lambda_1 = -\sqrt{\sigma_v(v,s)}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\sigma_v(v,s)}, \quad \lambda_3 = c_1;$$

系统 (16.0.3) 的两个特征值是

$$\lambda_1 = -\sqrt{\frac{\mathrm{d}\sigma(v,h(v))}{\mathrm{d}v}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{\mathrm{d}\sigma(v,h(v))}{\mathrm{d}v}}.$$

我们将先讨论柯西问题

$$\begin{cases} v_t - u_x = \varepsilon v_{xx}, \\ u_t - \sigma(v,s)_x = \varepsilon u_{xx}, \\ s_t + c_1 s_x + \beta \dfrac{s-h(v)}{\tau} = \varepsilon s_{xx} \end{cases} \tag{16.0.4}$$

带初值 (16.0.2) 的零松弛与零耗散极限. 当 $\tau \leqslant \dfrac{\varepsilon}{M}$ 时, 其中 $M > 0$ 为仅依赖于初值的适当大的常数, 我们对非常普通的 $\sigma(v,s)$ 得到了柯西问题 (16.0.4), (16.0.2) 的解 $(v^{\varepsilon,\tau}, u^{\varepsilon,\tau}, s^{\varepsilon,\tau})$ 的收敛性, 即使系统 (16.0.1) 是椭圆双曲混合型的, 即 $\sigma_v(v,s) \ngeqslant 0$.

之后, 考虑不带黏性的系统 (16.0.1) 的特殊情形

$$\begin{cases} v_t - u_x = 0, \\ u_t - (v - cs)_x = 0, \\ s_t + \dfrac{s - h(v)}{\tau} = 0 \end{cases} \tag{16.0.5}$$

带初值 (16.0.2) 的松弛极限, 其中 c 是正常数, 而非线性函数 $h(v)$ 必须满足次特征场条件:

$$0 < d_1 \leqslant h'(v) \leqslant d_2 < \frac{1}{c}, \tag{16.0.6}$$

其中, d_1 与 d_2 是正常数.

最后, 我们对 $2n \times 2n$ 色谱学双曲系统进行研究.

16.1 控制扩散与刚性松弛

本节把兴趣集中于柯西问题 (16.0.4)–(16.0.2) 关于刚性松弛与控制扩散的奇异极限, 将对松弛时间 τ 趋于零的速度比 ε 快即 $\tau = o(\varepsilon)$ $(\varepsilon \to 0)$ 的情形建立下述紧性框架:

定理 16.1.1 (A) *设初值* $\big(v_0(x), u_0(x), s_0(x)\big)$ *是光滑函数且满足*

(c_1) $\|(v_0(x), u_0(x), s_0(x))\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant M_1$,

$\|(v_0(x), u_0(x), s_0(x))\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant M_1$,

$\lim\limits_{|x|\to\infty} \left(\dfrac{\mathrm{d}^i v_0}{\mathrm{d}x^i}, \dfrac{\mathrm{d}^i u_0}{\mathrm{d}x^i}, \dfrac{\mathrm{d}^i s_0}{\mathrm{d}x^i}\right) = (0,0,0), \quad i = 0,1;$

(c_2) *函数* $h(v) = cv$, $\sigma(v,s)$ *满足*

$$\big|\sigma_s(v,s)\big| \leqslant M_2, \quad \bar{\sigma}'(v) \geqslant d > \max\left\{0, c^2 - c + \frac{2c^2 c_1^2}{(M_2+1)^2}\right\},$$

其中, $\bar{\sigma}(v) = \sigma(v, cv)$, *则对任意给定的满足* $\tau(M_2+1)^2 \leqslant \varepsilon$ *的* $\varepsilon, \tau > 0$, *柯西问题* (16.0.4) (16.0.2) *的光滑解* $(u^{\varepsilon,\tau}, v^{\varepsilon,\tau}, s^{\varepsilon,\tau})$ *在* $\mathbb{R} \times [0,T]$ $(\forall T > 0)$ *上存在且满足*

$$|v^{\varepsilon,\tau}(x,t)|, \quad |u^{\varepsilon,\tau}(x,t)|, \quad |s^{\varepsilon,\tau}(x,t)| \leqslant M(\varepsilon, T), \tag{16.1.1}$$

$$\|v^{\varepsilon,\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}, \quad \|u^{\varepsilon,\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}, \quad \|s^{\varepsilon,\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant M, \tag{16.1.2}$$

$$\|(s^{\varepsilon,\tau}-cv^{\varepsilon,\tau})^2\|_{L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)}\leqslant \tau M, \tag{16.1.3}$$

$$\left\|\varepsilon\left[(v_x^{\varepsilon,\tau})^2+(u_x^{\varepsilon,\tau})^2+(s_x^{\varepsilon,\tau})^2\right]\right\|_{L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)}\leqslant M. \tag{16.1.4}$$

(B) 进一步, 设函数 $\bar{\sigma}(v)=\sigma(v,cv)$ 满足

(c_3) $\bar{\sigma}''(\bar{v})=0$, $\bar{\sigma}''(v)\neq 0$ ($\forall v\neq \bar{v}$), 且 $\bar{\sigma}''$, $\bar{\sigma}'''\in L^2(\mathbb{R})\cap L^\infty(\mathbb{R})$,

则存在柯西问题 (16.0.4)–(16.0.2) 的解的子列 $\{(v^{\varepsilon,\tau},u^{\varepsilon,\tau},s^{\varepsilon,\tau})\}$ 及函数 $(v,u,s)\in L^2(\mathbb{R}\times[0,T])$ 使得

$$(v^{\varepsilon,\tau},u^{\varepsilon,\tau},s^{\varepsilon,\tau})\xrightarrow{\text{a.e.}}(v,u,s)\quad(\varepsilon\to 0), \tag{16.1.5}$$

其中, 极限函数 (v,u,s) 满足 $s=h(v)$ 且 (v,u) 是平衡系统 (16.0.3) 带初值 $(v(x,0),u(x,0))=(v_0(x),u_0(x))$ 的熵解.

注 16.1.1 定理 16.1.1 中的条件 $h(v)=cv$ 是为了避免技术上的细节处理. 从下面的证明不难看出所有步骤对更一般的函数 $h(v)$ 有效, 只要 $h'(v)\geqslant d_1>0$, 因为这时可把 $s-h(v)$ 改写为另外一种形式:

$$s-h(v)=h'(\theta)(h^{-1}(s)-v),$$

其中, h^{-1} 是 h 的反函数, θ 在 $h^{-1}(s)$ 与 v 之间取值.

证明 我们应用下述局部存在性引理及 L^∞ 估计 (16.1.1) 来证明定理 16.1.1 中的第一部分.

引理 16.1.1 设初值满足定理 16.1.1 中的条件 (c_1), 则对任意给定的 ε, $\tau>0$, 柯西问题 (16.0.4)–(16.0.2) 存在唯一的局部光滑解 (u,v,s), 它满足

$$\left|\frac{\partial^i v^{\varepsilon,\tau}}{\partial x^i}\right|+\left|\frac{\partial^i u^{\varepsilon,\tau}}{\partial x^i}\right|+\left|\frac{\partial^i s^{\varepsilon,\tau}}{\partial x^i}\right|\leqslant M(t_1,\varepsilon,\tau)<\infty\quad(i=0,1,2),$$

其中, 常数 $M(t_1,\varepsilon,\tau)>0$ 只依赖于 t_1, ε, τ, 而局部时间 $t_1>0$ 只依赖于初值的 L^∞ 范数; 而且

$$\lim_{|x|\to\infty}\left(\frac{\mathrm{d}^i v^{\varepsilon,\tau}}{\mathrm{d}x^i},\frac{\mathrm{d}^i u^{\varepsilon,\tau}}{\mathrm{d}x^i},\frac{\mathrm{d}^i s^{\varepsilon,\tau}}{\mathrm{d}x^i}\right)=(0,0,0)\quad(i=0,1) \tag{16.1.6}$$

关于 $t\in[0,t_1]$ 一致成立.

证明 引理 16.1.1 可通过把压缩映射原理应用于方程组 (16.0.4) 的积分表示得到. 细节请参看定理 1.0.1 的证明. □

为了推导关键的估计式 (16.1.1), 需要条件 $\tau(M_2+1)^2\leqslant\varepsilon$ 和 (c_2). 在不引起混淆的情况下, 暂时略去上标 ε, τ.

分别用 $\bar{\sigma}(v)+cv \quad cs, u$ 以及 $s-cv$ 乘方程组 (16.0.4) 中的第一、二、三个方程, 然后把所得结果相加, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_0^v \bar{\sigma}(v)+cv\mathrm{d}v+\frac{u^2}{2}-csv+\frac{s^2}{2}\right)_t\\
&+\left(cus-u(\bar{\sigma}(v)+cv)+\frac{c_1s^2}{2}\right)_x\\
&-cc_1vs_x-u\left(\sigma(v,s)+s-(\sigma(v,cv)+cv)\right)_x+\frac{(s-cv)^2}{\tau}\\
=&\,\varepsilon\left(\int_0^v \bar{\sigma}(v)+cv\mathrm{d}v+\frac{u^2}{2}-csv+\frac{s^2}{2}\right)_{xx}\\
&-\varepsilon\left(\bar{\sigma}'(v)+c\right)v_x^2-\varepsilon u_x^2-\varepsilon s_x^2+2c\varepsilon s_xv_x.
\end{aligned}\tag{16.1.7}
$$

关于等式 (16.1.7) 左端中的第三、四项, 有估计:

$$
\begin{aligned}
&-cc_1vs_x-u\left(\sigma(v,s)+s-(\sigma(v,cv)+cv)\right)_x\\
=&\left(\frac{c_1c^2}{2}v^2-cc_1vs\right)_x-\big(u(\sigma(v,s)+s-(\sigma(v,cv)+cv))\big)_x\\
&+u_x(\sigma_s(v,\alpha)+1)(s-cv)+cc_1v_x(s-cv),
\end{aligned}\tag{16.1.8}
$$

其中, α 在 s 与 cv 之间取值. 由 (c_2) 中的第一个条件, 等式 (16.1.8) 中的最后两项有上界

$$
\frac{3(s-cv)^2}{4\tau}+\frac{\tau(M_2+1)^2u_x^2}{2}+\tau c^2c_1^2v_x^2.\tag{16.1.9}
$$

把 (16.1.7)~(16.1.9) 相结合就得到下述不等式:

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_0^v \bar{\sigma}(v)+cv\mathrm{d}v+\frac{u^2}{2}-csv+\frac{s^2}{2}\right)_t\\
&+\left(cus-u(\bar{\sigma}(v)+cv)+\frac{c_1}{2}s^2\right)_x-\left(cc_1vs-\frac{c_1c^2}{2}v^2\right)_x\\
&-\big(u(\sigma(v,s)+s-(\sigma(v,cv)+c))\big)_x+\frac{(s-cv)^2}{4\tau}\\
\leqslant&\,\varepsilon\left(\int_0^v(\sigma(v)+cv)\mathrm{d}v+\frac{u^2}{2}-csv+\frac{s^2}{2}\right)_{xx}-\varepsilon\big(\bar{\sigma}'(v)+c\big)v_x^2\\
&-\varepsilon s_x^2+2c\varepsilon s_xv_x+c^2c_1^2\tau v_x^2-\left(\varepsilon-\frac{\tau(M_2+1)^2}{2}\right)u_x^2.
\end{aligned}\tag{16.1.10}
$$

由 (c_2) 中的第二个条件可知

$$
\int_0^v(\bar{\sigma}(v)+cv)\mathrm{d}v+\frac{u^2}{2}-csv+\frac{s^2}{2}
$$

是严格凸函数. 因此, 若 $\tau(M_2+1)^2 \leqslant \varepsilon$, 则在 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ 上对 (16.1.10) 分部积分, 并注意到等式 (16.1.6), 我们立即得到估计 (16.1.2)~(16.1.4).

方程组 (16.0.4) 中的第一个方程两边对 x 求导得

$$(v_x)_t - u_{xx} = \varepsilon(v_x)_{xx}. \tag{16.1.11}$$

用 v_x 乘方程 (16.1.11) 即得

$$\left(\frac{v_x^2}{2}\right)_t - (v_x u_x)_x + u_x v_{xx} = \varepsilon\left(\frac{v_x^2}{2}\right)_{xx} - \varepsilon v_{xx}^2. \tag{16.1.12}$$

式 (16.1.12) 两端在 $\mathbb{R}\times[0,t]$ 上积分并利用 $\|u_x^2\|_{L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)} \leqslant M(\varepsilon)$, 有 $\|v_x^2(\cdot,t)\|_{L^1(R)} \leqslant M(\varepsilon)$, 其中 $M(\varepsilon)$ 是与 ε 有关的常数. 因此

$$v^2 = \left|\int_{-\infty}^{x}(v^2)_x\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} v^2\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2\mathrm{d}x \leqslant M(\varepsilon).$$

类似地, 可从方程组 (16.0.4) 中的第二、三个方程推出 $\|s_x^2(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leqslant M(\varepsilon)$ 和 $\|u_x^2(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leqslant M(\varepsilon)$, 从而得到估计 (16.1.1) 及定理 16.1.1 中第一部分 (A) 的证明.

利用估计 (16.1.2)~(16.1.4), 我们容易验证 $\eta(v^{\varepsilon,\tau},u^{\varepsilon,\tau})_t + q(v^{\varepsilon,\tau},u^{\varepsilon,\tau})_x$ 在 $H^{-1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中紧, 其中 (η,q) 是在 12.2 节构造的任一 Shearer 型熵-熵流. 这蕴涵着 $\{(v^{\varepsilon,\tau},u^{\varepsilon,\tau})\}$ 的强收敛性. 然后再由估计 (16.1.3) 即得 $s^{\varepsilon,\tau} \xrightarrow{\text{a.e.}} s\ (\varepsilon\to 0)$. 这就证明了结论 (16.1.5), 从而完成了定理 16.1.1 的证明. □

16.2 反应流模型

考虑化学反应流系统 (16.0.5) 带光滑初值 (16.0.2) 的解 (v^τ,u^τ,s^τ) 的松弛极限, 有

定理 16.2.1 *设条件 (16.0.6) 成立, 则对任意给定的 $\tau>0$, 柯西问题 (16.0.5)-(16.0.2) 存在唯一的整体光滑解 (v^τ,u^τ,s^τ). 进一步, 若初值满足*

$$\int_{\mathbb{R}}[v_0^2(x)+u_0^2(x)+s_0^2(x)]\mathrm{d}x \leqslant M,\quad \tau^2\int_{\mathbb{R}}[v_{0x}^2(x)+u_{0x}^2(x)+s_{0x}^2(x)]\mathrm{d}x \leqslant M, \tag{16.2.1}$$

且函数 $h(v)$ 满足

$$h''(\bar{v})=0,\quad h''(v)\neq 0\ (\forall v\neq\bar{v}),\quad h''(v),\ h'''(v)\in L^2(\mathbb{R})\cap L^\infty(\mathbb{R}),$$

则存在子列 $\{(v^\tau,u^\tau,s^\tau)\}$ 使得

$$(v^\tau,u^\tau,s^\tau) \xrightarrow{\text{a.e.}} (v,u,s)\quad (\tau\to 0), \tag{16.2.2}$$

其中, 极限函数 (v,u,s) 满足 $s=h(v)$, (v,u) 是平衡系统

$$\begin{cases} v_t-u_x=0, \\ u_t-(v-ch(v))_x=0 \end{cases} \tag{16.2.3}$$

带初值 $(v(x,0),u(x,0))=(v_0(x),u_0(x))$ 的一个熵解.

条件 (16.0.6) 的右半部分确保了平衡系统 (16.2.3) 严格双曲, 因为在这种情形下,

$$\frac{\mathrm{d}(v-ch(v))}{\mathrm{d}v}=1-ch'(v)>0;$$

而 (16.0.6) 的左半部分等价于严格的次特征场条件

$$\lambda_1<\bar{\lambda}_1<\lambda_2<\bar{\lambda}_2<\lambda_3,$$

其中, $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=1$ 是系统 (16.0.5) 的三个特征值, 而

$$\bar{\lambda}_1=-\sqrt{1-ch'(v)},\quad \bar{\lambda}_2=\sqrt{1-ch'(v)}$$

是平衡系统 (16.2.3) 的两个特征值.

我们现在通过 Chapman-Enskog 型渐近展开式说明 (16.0.6) 是确保柯西问题 (16.0.5)–(16.0.2) 的松弛逼近解稳定的必不可少的条件. 令

$$s^\tau=h(v^\tau)+\tau g(v^\tau,u^\tau,v_x^\tau,u_x^\tau,\cdots)+O(\tau^2),$$

则由系统 (16.0.5) 得

$$\begin{cases} v_t^\tau-u_x^\tau=0, \\ u_t^\tau-(v^\tau-ch(v^\tau))_x=-\tau g_x+O(\tau^2), \\ h(v^\tau)_t+O(\tau)=-g+O(\tau). \end{cases} \tag{16.2.4}$$

从 (16.2.4) 中的第三个方程解出 g, 并把之代入第二个方程, 注意到 $v_t^\tau=u_x^\tau$, 有

$$\begin{cases} v_t^\tau-u_x^\tau=0, \\ u_t^\tau-(v^\tau-ch(v^\tau))_x=\tau(h'(v^\tau)u_x^\tau)_x+O(\tau^2), \end{cases}$$

这是稳定的双曲抛物混合型系统即所谓的 Navier-Stokes 方程, 如果 $h'(v)\geqslant d_1>0$.

对固定的 $\tau>0$, 定理 16.2.1 中整体光滑解 (v^τ,u^τ,s^τ) 的存在性是显然的, 因为唯一的非线性函数 $h(v)$ 满足增长性条件 (16.0.6).

接下来分几步证明定理 16.2.1 中的紧性 (16.2.2) 为了方便, 略去上标 τ.

引理 16.2.1 设 $h(v)$ 满足条件 (16.0.6), 则

$$\int_{\mathbb{R}}(v^2+u^2+s^2)\mathrm{d}x+\frac{1}{\tau C}\int_0^t\int_{\mathbb{R}}(s-h(v))^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$\leqslant C\int_{\mathbb{R}}[v_0^2(x)+u_0^2(x)+s_0^2(x)]\mathrm{d}x \tag{16.2.5}$$

对某个与 τ, t 无关的正常数 C 成立.

证明 设 h^{-1} 为 h 的反函数, 则 $(h^{-1})'=1/h'\in[1/d_2,1/d_1]$, 因而

$$h^{-1}(s)-v=(h^{-1})'(\alpha)(s-h(v))$$

对某个介于 s 与 $h(v)$ 之间的 α 成立.

分别用 $(v-cs)$, u 以及 $c(h^{-1}(s)-v)$ 乘系统 (16.0.5) 中的第一、二、三个方程, 然后相加得

$$\left(v^2+u^2-2cvs+2c\int_0^s h^{-1}(s)\mathrm{d}s\right)_t-2((v-cs)u)_x$$

$$+\frac{2c(h^{-1})'(\alpha)}{\tau}(s-h(v))^2=0. \tag{16.2.6}$$

由于

$$2c\int_0^s h^{-1}(s)\mathrm{d}s\geqslant cs^2\min\{1/h'\}\geqslant cs^2/d_2>c^2s^2,$$

所以在 $\mathbb{R}\times[0,t]$ 上对 (16.2.6) 积分即可获得引理 16.2.1 的证明. □

利用系统 (16.0.5) 中的第二、三个方程, 有

$$u_t-(v-ch(v))_x=-c(s-h(v))_x$$

$$=cs_{xt}=(v_x-u_t)_t=\tau(u_{xx}-u_{tt}), \tag{16.2.7}$$

从而得到下述方程组:

$$\begin{cases}v_t-u_x=0,\\ u_t-g(v)_x=\tau(u_{xx}-u_{tt}),\end{cases} \tag{16.2.8}$$

其中, $g(v)=v-ch(v)$.

引理 16.2.2 设初值满足式 (16.2.1), 则柯西问题 (16.0.5)-(16.0.2) 的解 (v,u,s) 满足

$$\tau\int_0^t\int_{\mathbb{R}}(v_x^2+u_x^2+s_x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant M.$$

证明　分别用 $g(v)$ 与 u 乘方程组 (16.2.8) 中的第一、二个方程, 然后相加得

$$\left(\int_0^v g(v)\mathrm{d}v + \frac{u^2}{2}\right)_t - (ug(v))_x = \tau\left(\frac{u^2}{2}\right)_{xx} - \tau u_x^2 - \tau\left(\frac{u^2}{2}\right)_{tt} + \tau u_t^2,$$

或者等价地

$$\left(\int_0^v g(v)\mathrm{d}v + \frac{u^2}{2} + \tau u u_t\right)_t - (ug(v))_x + \tau(u_x^2 \quad u_t^2) - \tau(uu_x)_x. \tag{16.2.9}$$

所以问题的主要困难在于 $u_x^2 - u_t^2$ 不是恒正的. 为了弥补这个缺陷, 我们首先用 u_t 乘方程组 (16.2.8) 中第二个方程得

$$u_t^2 - g'(v)v_x v_t = \tau(u_t u_x)_x - \tau\left(\frac{u_x^2 + u_t^2}{2}\right)_t,$$

因而

$$\tau^2(u_x^2 + u_t^2)_t + 2\tau[u_t^2 - g'(v)v_x u_t] = 2\tau^2(u_t u_x)_x. \tag{16.2.10}$$

然后用 v_x 乘方程组 (16.2.8) 中第二个方程得

$$\begin{aligned}
g'(v)v_x^2 &= v_x(u + \tau u_t)_t - \tau v_x u_{xx} \\
&= (v(u + \tau u_t)_t)_x - v(u + \tau u_t)_{tx} - \tau v_x u_{xx} \\
&= (v(u + \tau u_t))_{tx} - (v_t(u + \tau u_t))_x - \tau v_x u_{xx} \\
&\quad + v_t(u + \tau u_t)_x - (v(u + \tau u_t)_x)_t \\
&= -(v_t(u + \tau u_t))_x + (v_x(u + \tau u_t))_t \\
&\quad + u_x(u + \tau u_t)_x - \tau\left(\frac{v_x^2}{2}\right)_t,
\end{aligned} \tag{16.2.11}$$

这里对最后一项 $\tau v_x u_{xx}$ 使用了等式 $u_x = v_t$.

从等式 (16.2.11) 推出

$$\begin{aligned}
&\tau^2\left(\frac{v_x^2}{2} - \frac{u_x^2}{2}\right)_t - \tau(v_x(u + \tau u_t))_t + \tau[g'(v)v_x^2 - u_x^2] \\
&= -\tau(v_t(u + \tau u_t))_x
\end{aligned} \tag{16.2.12}$$

把 (16.2.9), (16.2.10) 与 (16.2.12) 三式相加得

$$\begin{aligned}
\tau^2(u_t u_x)_x = &\left(\frac{1}{2}(u + \tau u_t - \tau v_x)^2 + \frac{1}{2}\tau^2(u_t^2 + u_x^2) + \int_0^v g(v)\mathrm{d}v\right)_t \\
&-(ug(v))_x + \tau[u_t^2 \quad 2g'(v)v_x u_t + g'(v)v_x^2].
\end{aligned}$$

由条件 (16.0.6) 知 $g'(v) = 1 - ch'(v) \in [1 - cd_2, 1 - cd_1]$, 因而

$$u_t^2 - 2g'(v)v_x u_t + g'(v)v_x^2 \geqslant c_1(u_t^2 + v_x^2) \tag{16.2.13}$$

对某个足够小的正常数 c_1 成立.

在 $\mathbb{R} \times [0, t]$ 上对 (6.2.12) 积分, 并利用 (16.2.13) 式, 有

$$\tau \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (u_t^2 + v_x^2) \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant M, \quad \tau^2 \int_{\mathbb{R}} (u_t^2 + u_x^2) \mathrm{d}x \leqslant M. \tag{16.2.14}$$

所以在 $\mathbb{R} \times [0, t]$ 上对 (16.2.9) 积分, 并利用估计 (16.2.5) 与 (16.2.14) 可推出

$$\tau \int_0^t \int_{\mathbb{R}} u_x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant M.$$

重写 (16.0.5) 中的第三个方程, 然后对 x 求导即得

$$\tau(s_t)_x s_x + [s_x - h'(v)v_x]s_x = 0. \tag{16.2.15}$$

在 $\mathbb{R} \times [0, t]$ 上对 (16.2.15) 积分并利用 (16.2.14) 中关于 v_x^2 的估计就可得到

$$\tau^2 \int_0^t s_x^2 \mathrm{d}x \leqslant M, \quad \tau \int_0^t \int_{\mathbb{R}} s_x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant M, \tag{16.2.16}$$

从而获得引理 16.2.2 的证明. □

定理 16.2.1 的证明 设 $(\eta(v, u), q(v, u))$ 是平衡系统 (16.2.3) 的任一 Shearer 型熵–熵流. 用 (η_v, η_u) 乘以方程组 (16.2.8), 注意到 (16.2.7) 中第一个等式, 有

$$\begin{aligned}
\eta(v, u)_t + q(v, u)_x &= c\eta_v(h(v) - s) \\
&= c\big(\eta_v(h(v) - s)\big)_x - c(\eta_{vv}v_x + \eta_{vu}u_x)(h(v) - s) \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

显然, 由引理 16.2.1 知

$$I_1 = c\big(\eta_v(h(v) - s)\big)_x - c\Big(\tau^{\frac{1}{2}}\eta_v \frac{(h(v) - s)}{\tau^{\frac{1}{2}}}\Big)_x$$

在 $W_{\mathrm{loc}}^{-1,2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ 中紧; 而由引理 16.2.2 知

$$I_2 = -c(\eta_{vv}v_x + \eta_{vu}u_x)(h(v) - s) = -c\tau^{\frac{1}{2}}(\eta_{vv}v_x + \eta_{vu}u_x) \cdot \frac{h(v) - s}{\tau^{\frac{1}{2}}}$$

在 $L_{\mathrm{loc}}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ 中有界, 从而对某个常数 $\alpha \in (1, 2)$ 在 $W_{\mathrm{loc}}^{-1,\alpha}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ 中紧. 所以 $\eta(v^\tau, u^\tau)_t + q(v^\tau, u^\tau)_x$ 在 $W_{\mathrm{loc}}^{-1,2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ 中紧. 因此, 根据第 12 章中介绍的 Shearer 的紧性框架即得

$$(v^\tau, u^\tau) \xrightarrow{\text{a.e.}} (v, u) \quad (\tau \to 0)$$

因而由估计 (16.2.5), 我们有 $s^\tau \xrightarrow{\text{a.e.}} s$ $(\tau \to 0)$. 这就完成了定理 16.2.1 的证明. □

16.3　$2n \times 2n$ 色谱学双曲系统

考虑 $2n \times 2n$ 非线性双曲系统

$$\begin{cases} u_{it} + u_{ix} + \dfrac{F_i(u) - v_i}{\tau} = 0, \\ v_{it} + \dfrac{v_i - F_i(u)}{\tau} = 0 \end{cases} \tag{16.3.1}$$

带初值

$$(u_i(x,0), v_i(x,0)) = (u_{i0}(x), v_{i0}(x)) \tag{16.3.2}$$

的柯西问题, 其中 $i = 1, 2, \cdots, n$, $\tau > 0$. 系统 (16.3.1) 源于色谱学, u_i 与 v_i 分别表示固态溶质与液态溶质的物质的量浓度. 当 $\tau = 0$ 时, 平衡关系 $v_i = F_i(u)$ 通常称为等温吸附线. 一般说来, 它是 u_i 的一个复杂的非线性函数, 已把不同溶质间的相互影响考虑在内. 我们的兴趣限于研究特殊的平衡关系, 即

$$v_i = u_i\phi(r), \quad r = \sum_{i=1}^{n} u_i^2$$

的情形下柯西问题 (16.3.1)–(16.3.2) 的松弛解 (u_i^τ, v_i^τ) 的存在性及其收敛性, 表明它们在 $\tau \to 0$ 时趋于平衡态 (u_i, v_i), 其中 $v_i = u_i\phi(r)$, u_i 满足对称双曲系统:

$$(u_i + u_i\phi(r))_t + u_{ix} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{16.3.3}$$

当 $n = 1$ 时, 松弛解 (u^τ, v^τ) 的存在性以及它与标量方程

$$(u + F(u))_t + u_x = 0$$

的唯一弱解 (u, v) 的误差估计已在文献 [100, 101] 中得到很好的研究; 但对于 $n \geqslant 2$ 的情形结果较少.

下面给出本节的主要结果:

定理 16.3.1　*设 $\phi(r) \in C^1(\mathbf{R}^+)$, $\phi'(r) > 0$, 且 $\phi(r) \to \infty$ $(r \to \infty)$. 如果初值 $(u_{i0}(x), v_{i0}(x))$ 有界, 且存在正常数 d 使得*

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{n} u_{i0}^2(x)\right) \leqslant d, \quad \sum_{i=1}^{n} v_{i0}^2(x) \leqslant d^2\phi^{-1}(d)$$

那么对任意给定的 $\tau > 0$, 柯西问题 (16.3.1)–(16.3.2) 在 $\mathbf{R} \times [0, T]$ $(\forall T > 0)$ 上存在唯一的整体古典解 (u_i^τ, v_i^τ), 并且有一致界估计

$$|u_i^\tau| + |v_i^\tau| \leqslant M, \tag{16.3.4}$$

其中, M 为仅依赖于初值的正常数.

证明 令 $s=\sum_{i=1}^{n}v_i^2$, 则分别用 $2u_i$ 和 $2v_i$ 乘系统 (16.3.1) 中的第一、二个方程得

$$\left\{\begin{array}{l} r_t+r_x+\dfrac{2r\phi(r)-\sum\limits_{i=1}^{n}2u_iv_i}{\tau}=0,\\ s_t+\dfrac{2s-\sum\limits_{i=1}^{n}2u_iv_i\phi(r)}{\tau}=0. \end{array}\right. \tag{16.3.5}$$

从 (16.3.5) 可推出

$$\left\{\begin{array}{l} r_t+r_x+\dfrac{r(2\phi(r)-d)-s/d}{\tau}\leqslant 0,\\ s_t+\dfrac{s-r\phi^2(r)}{\tau}=0, \end{array}\right.$$

因为根据基本不等式有

$$\sum_{i=1}^{n}2u_iv_i\leqslant dr+s/d,\quad \sum_{i=1}^{n}2u_iv_i\phi(r)\leqslant s+r\phi^2(r).$$

设 $(\bar r,\bar s)$ 满足

$$r(2\phi(r)-d)-s/d=0,\quad s-r\phi^2(r)=0,$$

则易得 $\phi(\bar r)=d$, $\bar r=\phi^{-1}(d)$, $\bar s=d^2\phi^{-1}(d)$. 由定理 16.3.1 中关于初值的假设, $r=\bar r$, $s=\bar s$ 是系统 (16.3.5) 的一个上解. 于是 $r\leqslant\bar r$, $s\leqslant\bar s$, 这蕴涵着 (16.3.4). 然后利用文献 [2, 99] 中解的局部存在性定理即可完成本定理的证明. □

定理 16.3.2 *设初值 $(u_{i0}(x),v_{i0}(x))$ 具有紧支集或当 $|x|\to\infty$ 时趋于零的速度充分快. 如果 $n=2$ 且存在正常数 c 使得 $\phi(r)\geqslant c$, 那么存在柯西问题 (16.3.1) (16.3.2) 松弛解的子列 $\{(u_i^\tau,v_i^\tau)\}$ 几乎处处收敛于有界函数 (u_i,v_i), 其中 $v_i=u_i\phi(r)$, u_i 是平衡系统 (16.3.3) 的弱解.*

证明 本定理的证明主要基于松弛逼近解 (u_i^τ,v_i^τ) 的下述估计:

$$\tau\|u_{it}^2\|_{L^1(\mathbb{R}\times[0,T])}\leqslant M, \tag{16.3.6}$$

$$\tau\|u_{ix}^2\|_{L^1(\mathbb{R}\times[0,T])}\leqslant M, \tag{16.3.7}$$

$$\|u_i\phi(r)-v_i\|_{L^1(\mathbb{R}\times[0,T])}\leqslant\tau M, \tag{16.3.8}$$

$$\tau\|v_{it}^2\|_{L^1(\mathbb{R}\times[0,T])}\leqslant M. \tag{16.3.9}$$

把系统 (16.3.1) 中的两个方程相加, 然后利用第一个方程得

$$(u_i+u_i\phi(r))_t+u_{ix}+\tau(u_{it}+u_{ix})_t=0. \tag{16.3.10}$$

分别用 $2u_i$ 和 $2\tau u_{it}$ 乘方程 (16.3.10), 有

$$\left(r + 2r\phi(r) - \int_0^r \phi(r)\mathrm{d}r\right)_t + r_x + \tau(r_t + r_x)_t - 2\tau\sum_{i=1}^n (u_{it} + u_{ix})u_{it} = 0, \tag{16.3.11}$$

$$2\tau\sum_{i=1}^n (u_{it} + u_{ix})u_{it} + 2\tau\sum_{i=1}^n u_{it}(u_i\phi(r))_t + \tau^2\sum_{i=1}^n \left((u_{it}^2)_t + (u_{it}^2)_x\right) = 0. \tag{16.3.12}$$

于是把方程 (16.3.11) 与 (16.3.12) 相加得

$$\begin{aligned}&\left(r + \tau r_t + \tau^2\sum_{i=1}^n u_{it}^2\right)_t + \left(2r\phi(r) - \int_0^r \phi(r)\mathrm{d}r\right)_t\\&+\left(r + \tau r_t + \tau^2\sum_{i=1}^n u_{it}^2\right)_x + 2\tau\sum_{i=1}^n u_{it}(u_i\phi(r))_t = 0.\end{aligned} \tag{16.3.13}$$

注意到

$$r + \tau r_t + \tau^2\sum_{i=1}^n u_{it}^2 = \sum_{i=1}^n (u_i^2 + 2\tau u_i u_{it} + \tau^2 u_{it}^2) \geqslant 0,$$

$$2r\phi(r) - \int_0^r \phi(r)\mathrm{d}r \geqslant 0$$

以及

$$\sum_{i=1}^n u_{it}(u_i\phi(r))_t = \sum_{i=1}^n u_{it}^2\phi(r) + 2\phi'(r)\left(\sum_{i=1}^n u_i u_{it}\right)^2 \geqslant c\sum_{i=1}^n u_{it}^2,$$

所以在 $\mathbb{R}\times[0,T]$ 上对 (16.3.13) 积分即得估计 (16.3.6).

为了证得估计 (16.3.7), 用 τu_{ix} 乘方程 (16.3.10) 得

$$\begin{aligned}&\tau\sum_{i=1}^n u_{ix}^2 + \tau\sum_{i=1}^n u_{ix}(u_i + u_i\phi(r))_t + \tau^2\sum_{i=1}^n (u_{ix}u_{it})_t\\&-\frac{\tau^2}{2}\sum_{i=1}^n \left((u_{it}^2)_x - (u_{it}^2)_x\right) = 0.\end{aligned} \tag{16.3.14}$$

式 (16.3.14) 两端在 $\mathbb{R}\times[0,T]$ 上积分, 并利用估计 (16.3.6), 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tau^2\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2}u_{ix}^2 + u_{ix}u_{it}\right)\mathrm{d}x + \int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau}{2}\sum_{i=1}^n u_{ix}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant M. \tag{16.3.15}$$

于是从方程 (16.3.12) 推出

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau^2}{2}\sum_{i=1}^n u_{it}^2\mathrm{d}x \leqslant M_1 + \frac{\tau}{4}\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^n u_{ix}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant M. \tag{16.3.16}$$

把 (16.3.15) 与 (16.3.16) 两式相加即得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau^2}{2}\sum_{i=1}^{n}(u_{it}+u_{ix})^2\mathrm{d}x+\frac{\tau}{4}\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}u_{ix}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant M_2.$$

这蕴涵着估计 (16.3.7).

由式 (16.3.6), (16.3.7) 以及系统 (16.3.1) 中第一个方程可推出估计 (16.3.8), 再由系统 (16.3.1) 中第二个方程即可得到估计 (16.3.9).

根据估计 (16.3.6)~(16.3.9) 及文献 [12, 82] 中给出的标准方法不难验证:

$\eta(u_1^\tau,u_2^\tau)_t+q(u_1^\tau,u_2^\tau)_x$ 在 $H_{\mathrm{loc}}^{-1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中紧,

其中 (η,q) 是文献 [31] 中构造的系统 (16.3.3) 的任一熵 - 熵流.

最后, 应用文献 [98] 中的收敛框架可得

$$(u_1^\tau,u_2^\tau)\xrightarrow{\text{a.e.}}(u_1,u_2)\quad(\tau\to0).$$

再由不等式 (16.3.8) 得到平衡关系 $v_i=u_i\phi(r)$ $(i=1,2)$. 证毕. □

评　注

关于一般 3×3 双曲系统 (16.0.1) 的松弛极限的定理 16.1.1 选自文献 [102]. 在这之前, 形如 (16.0.1) 的两个特殊系统由 Lu-Klingenberg 在文献 [103] 中进行了研究.

Liu 和 Wu[98] 最先研究了系统

$$\begin{cases}v_t-u_x=0,\\u_t-s_x=0,\\(s-cv)_t+\dfrac{s-h(v)}{\tau}=0\end{cases}$$

的光滑松弛逼近解的松弛极限, 该系统与系统 (16.0.5) 等价. 后来, Tzavaras[98] 借鉴 Shearer 的基本框架与文献 [103] 中的一些思想而成功地得到了 L^p 解的奇异极限.

关于 $2n\times2n$ 色谱学双曲系统的两个结果即定理 16.3.1 与定理 16.3.2 选自文献 [104].

参 考 文 献

[1] Ladyzhenskaya O A, Solonnikov V A, Uraltseva N N. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. Providence: AMS Translations, 1968.

[2] Smoller J. Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1983.

[3] Lu Y G. Singular limits of stiff relaxation and dominant diffusion for nonlinear systems. J. Diff. Eqs., 2002, 179: 687–713.

[4] Perthame B. Kinetic Formulation of Conservation Laws. Oxford: Oxford Univ. Press, 2002.

[5] Lax P D. Hyperbolic systems of conservation laws II. Comm. Pure Appl. Math., 1957, 10: 537–566.

[6] Triebel H. Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators. Amsterdam-New York-Oxford: North-Holland Publishing Company, 1978.

[7] Simader C G. On Dirichlet's Boundary Value Problem. Lecture Notes in Math, 268. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1972.

[8] Lin P X. Young measures and an application of compensated compactness to one-dimensional nonlinear elastodynamics. Trans. Am. Math. Soc., 1992, 329: 377–413.

[9] Tartar T. Compensated compactness and applications to partial differential equations // Knops R J. Research Notes in Mathematics, Nonlinear Analysis and Mechanics, Heriot-Watt symposium, Vol. 4. London: Pitman Press, 1979.

[10] Ding X X, Chen G Q, Luo P Z. Convergence of the Lax-Friedrichs schemes for the isentropic gas dynamics I-II. Acta Math. Sci., 1985, 5: 415–472.

[11] Murat F. Compacité par compensation. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1978, 5: 489–507.

[12] Chen G Q, Levermore C D, Liu T P. Hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms and entropy. Comm. Pure Appl. Math., 1994, 47: 787–830.

[13] James F, Peng Y J, Perthame B. Kinetic formulation for chromatography and some other hyperbolic systems. J. Math. Pure Appl., 1995, 74: 367–385.

[14] Hoff E. The partial differential equation $u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx}$. Comm. Pure Appl. Math., 1950, 3: 201–230.

[15] Kruzkov S N. First order quasilinear equations in several independent variables. Mat. SB. (N.S.), 1970, 81: 228–255.

[16] Oleinik O. Discontinuous solutions of nonlinear differential equations. English Transl. in Am. Math. Soc. Transl. Ser., 1957, 26: 95–172.

[17] Yosida K. Functional Analysis. New York: Springer, 1968.

[18] Schonbek M E. Convergence of solutions to nonlinear dispersive equations. Comm. Partial Diff. Eqs., 1982, 7: 959–1000.

[19] Lu Y G Convergence of solutions to nonlinear dispersive equations without convexity conditions. Appl. Anal., 1989, 31: 239–246.

[20] Chen G Q, Lu Y G. A study on the applications of the theory of compensated compactness. Chinese Science Bulletin, 1988, 33: 641–644.

[21] Lu Y G. Cauchy problem for an extended model of combustion. Proc. Royal Soc. Edinburgh, 1992, 120A: 349–360.

[22] Lu Y G. Cauchy problem for a hyperbolic model. Nonlinear Anal., TMA, 1994, 23: 1135–1144.

[23] Majda A. A qualitative model for dynamic combustion. SIAM J. Appl. Math., 1981, 41: 70–93.

[24] Szepessy A. An existence result for scalar conservation laws using measure valued solutions. Comm. Partial Diff. Eqs., 1989, 14: 1329–1350.

[25] DiPerna R J. Measure-valued solutions to conservation laws. Arch. Rat. Mech. Anal., 1985, 88: 223–270.

[26] Lax P D. Shock waves and entropy. // Zarantonello E. Contributions to Nonlinear Functional Analysis. New York: Academic Press, 1971: 603–634.

[27] Chueh K N, Conley C C, Smoller J A. Positive invariant regions for systems of nonlinear diffusion equations. Indiana Univ. Math. J., 1997, 26: 372–411.

[28] Keyfitz B, Kranzer H. A system of nonstrictly hyperbolic conservation laws arising in elasticity. Arch. Rat. Mech. Anal., 1980, 72: 219–241.

[29] Liu T P, Wang J H. On a hyperbolic system of conservation laws which is not strictly hyperbolic. J. Diff. Eqs., 1985, 57: 1–14.

[30] Lu Y G. Global weak solution for a symmetrically hyperbolic system. Appl. Math. Letters, 2006, 19: 522–526.

[31] Chen G Q. Hyperbolic system of conservation laws with a symmetry. Commun. PDE, 1991, 16: 1461–1487.

[32] Temple B. Systems of conservation laws with invariant submanifolds. Trans. of Am. Math. Soc., 1983, 280: 781–795.

[33] Isaacon E, Marchesin D, Plohr B, et al. The Riemann problem near a hyperbolic singularity: the classification of solutions of quadratic Riemann problem (I). SIAM J. Appl. Math., 1988, 48: 1–24.

[34] Isaacon E, Temple B. The classification of solutions of quadratic Riemann problem

(II)-(III). SIAM J. Appl. Math., 1988, 48: 1287–1318.

[35] Shearer M, Schaeffer D G, Marchesin D, et al. Solution of the Riemann problem for a prototype 2×2 system of nonstrictly hyperbolic conservation laws. Arch. Rat. Mech. Anal. 1987, 97: 299–320.

[36] Lu Y G, Wang J H. The interactions of elementary waves of nonstrictly hyperbolic system. J. Math. Anal. Appl., 1992, 166: 136–169.

[37] Lu Y G. Convergence of the viscosity method for a nonstrictly hyperbolic system. Acta Math. Sci., 1992, 12: 230–239.

[38] Kan P T. On the Cauchy problem of a 2×2 system of nonstrictly hyperbolic conservation laws. New York: New York Univ., Ph.D. thesis, 1989.

[39] Chen G Q, Kan P T. Hyperbolic conservation laws with umbilic degeneracy I. Arch. Rat. Mech. Anal., 1995, 130: 231–276.

[40] LeRoux A Y. Numerical stability for some equations of gas dynamics. Mathematics of Computation, 1981, 37: 435–446.

[41] Heibig A. Existence and uniqueneons for some hyperbolic systems of conservation laws. Arch. Rat. Mech. Anal., 1994, 126: 79–101.

[42] Lu Y G, Mantilla I, Rendon L. Convergence of approximated solutions to a nonstrictly hyperbolic system. Advanced Nonlinear Studies, 2001, 1: 65–79.

[43] Bitsadze A V. Equations of Mixed Type. New York: Macmillan, 1964.

[44] Lions P L, Perthame B, Souganidis P E. Existence and stability of entropy solutions for the hyperbolic systems of isentropic gas dynamics in Eulerian and Lagrangian coordinates. Comm. Pure Appl. Math., 1996, 49: 599–638.

[45] Kamke E. Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen: 1. Gewöhnliche Differentialgleichungen. sixth ed. Leipzig: Akademische Verlagsanstalt, 1959.

[46] Nishida T. Global solution for an initial-boundary-value problem of a quasilinear hyperbolic system. Proc. Jap. Acad., 1968, 44: 642–646.

[47] Nishida T, Smoller J. Solutions in the large for some nonlinear hyperbolic conservation laws. Comm. Pure Appl. Math., 1973, 26: 183–200.

[48] Glimm J. Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations. Comm. Pure Appl. Math., 1965, 18: 697–715.

[49] DiPerna R J. Convergence of the viscosity method for isentropic gas dynamics. Commun. Math. Phys., 1983, 91: 1–30.

[50] Chen G Q. Convergence of the Lax-Friedrichs scheme for isentropic gas dynamics. Acta Math. Sci., 1986, 6: 75–120.

[51] Lions P L, Perthame B, Tadmor E. Kinetic formulation of the isentropic gas dynamics and p-system. Commun. Math. Phys., 1994, 163: 415–431.

[52] Huang F, Wang Z. Convergence of Viscosity Solutions for Isothermal Gas Dynamics.

SIAM J. Math. Anal., 2002, 34: 595–610.

[53] Lu Y G. Global Hölder continuous solution of isentropic gas dynamics. Proc. Royal Soc. Edinburgh, 1993, 123A: 231–238.

[54] Chen G Q, LeFloch P. Compressible Euler equations with general pressure law and related equations. Arch. Rat. Mech. Anal., 2000, 153: 221–259.

[55] Chen G Q, Lu Y G. Convergence of the approximation solutions to isentropic gas dynamics. Acta Math. Sci., 1990, 10: 39–46.

[56] Klingenberg C, Lu Y G. Existence of solutions to hyperbolic conservation laws with a source. Commun. Math. Phys., 1997, 187: 327–340.

[57] Chen G Q, Glimm J. Global solutions to the compressible Euler equations with geometric structure. Commun. Math. Phys., 1996, 180: 153–193.

[58] Ding X X, Chen G Q, Luo P Z. Convergence of the fractional step Lax-Friedrichs scheme and Godunov scheme for the isentropic system of gas dynamics. Commun. Math. Phys., 1989, 121: 63–84.

[59] Lu Y G. Some results for general systems of isentropic gas dynamics. Diff. Eqs., 2007, 43: 130–138.

[60] Earnshaw S. On the mathematical theory of sound. Philos. Trans., 1858, 150: 1150–1154.

[61] Whitham G B. Linear and Nonlinear Waves. New York: John Wiley and Sons, 1973.

[62] Klainerman S, Majda A. Singular limits of quasilinear hyperbolic systems with large parameters and the incompressible limit of compressible fluids. Comm. Pure Appl. Math., 1981, 34: 481–524.

[63] Oelschläger K. On the connection between Hamiltonian many-particle systems and the hydrodynamical equation. Arch. Rat. Mech. Anal., 1991, 115: 297–310.

[64] Oelschläger K. An integro-differential equation modelling a Newtonian dynamics and its scaling limit. Arch. Rat. Mech. Anal., 1997, 137: 99–134.

[65] Caprino S, Esposito R, Marra R, et al. Hydrodynamic limits of the Vlasov equation. Comm. Partial. Diff. Eqs., 1993, 18: 805–820.

[66] DiPerna R J. Global solutions to a class of nonlinear hyperbolic systems of equations. Comm. Pure Appl. Math., 1973, 26: 1–28.

[67] Bressan A. The unique limit of the Glimm scheme. Arch. Rat. Mech. Anal., 1995, 130: 205–230.

[68] Lu Y G. Convergence of viscosity solutions to a nonstrictly hyperbolic system. *In*: Chen G, Li Y, Zhu X, et al. Advances in Nonlinear Differential Equations and Related Areas. Singapore: World Scientific, 1998: 250–266.

[69] Lu Y G. Convergence of the viscosity method for nonstrictly hyperbolic conservation laws. Commun. Math. Phys., 1992, 150: 59–64.

[70] Lu Y G. Existence of global entropy solutions of a nonstrictly hyperbolic system. Arch. Rat. Mech. Anal., 2005, 178: 287–299.

[71] Cheng Z. The application of the kinetic formulation to a system of quadratic flux. Acta Math. Sci., 2009, 29B: 1375–1382.

[72] Cheng Z. On application of kinetic formulation of the Le Roux system. Proc. Edinburgh Math. Soc., 2009, 52: 263–272.

[73] Lax P D. Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves. Philadelphia: SIAM, 1973.

[74] Lu Y G. Convergence of the viscosity method for some nonlinear hyperbolic systems. Proc. Royal Soc. Edinburgh, 1994, 124A: 341–352.

[75] DiPerna R J. Convergence of approximate solutions to conservation laws. Arch. Rat. Mech. Anal., 1983, 82: 27–70.

[76] Dafermos C M. Estimates for conservation laws with little viscosity. SIAM J. Math. Anal., 1987, 18: 409–421.

[77] Frid H, Santos M. Nonstrictly hyperbolic systems of conservation laws of the conjugate type. Commun. PDE, 1994, 19: 27–59.

[78] Frid H, Santos M. The Cauchy problem for the system $\partial_t z + \partial_x(\bar{z}^\gamma) = 0$. J. Diff. Eqs., 1995, 111: 340–359.

[79] Shearer J. Global existence and compactness in L^p for the quasilinear wave equation. Comm. Partial Diff. Eqs., 1994, 19: 1829–1877.

[80] Leveque R J, van Leer P B, Lee H C. Model systems for reacting flow. Final Report, NASA-Ames University Consortium NCA2-188, 1989.

[81] Klingenberg C, Lu Y G. The vacuum case in Diperna's paper. J. Math. Anal. Appl., 1998, 1225: 679–684.

[82] Chen G Q, Liu T P. Zero relaxation and dissipation limits for hyperbolic conservation laws. Comm. Pure Appl. Math., 1993, 46: 755–781.

[83] Rhee H K, Aris R, Amundsen N R. On the theory of multicomponent chromatography. Phil. Trans. Royal. Soc. London, 1970, 267A: 419–455.

[84] Natalini R. Convergence to equilibrium for the relaxation approximations of conservation laws. Comm. Pure Appl. Math., 1996, 49: 795–823.

[85] Broadwell J E. Shock structure in a simple discrete velocity gas. Phys. Fluids, 1964, 7: 1243–1247.

[86] Caflish R E. Navier-Stokes and Boltzmann shock profiles for a model of gas dynamics. Comm. Pure Appl. Math., 1979, 32: 521–554.

[87] Cercignani C. The Boltzmann Equations and Its Application. New York: Spring-Verlag, 1988.

[88] Klingenberg C, Lu Y G. Cauchy problem for hyperbolic conservation laws with a

relaxation term. Proc. Royal Soc. Edinburgh, 1996, 126A: 821–828.

[89] Schochet S. The instant-response limit in Whitham's nonlinear traffic-flow model: Uniform well-poseness and global existence. Asymptotic Analysis, 1988, 1: 263–282.

[90] Evans L C, Souganidis P E. A PDE approach to geometric optics for certain semilinear parabolic equations. Indiana Univ. Math. J., 1989, 38: 141–172.

[91] Fife P. Dynamics of internal layers and diffusive interfaces, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics 53. Philadelphia: SIAM, 1988.

[92] Rubinstein J, Sternberg P, Keller B. Fast reaction, slow diffusion, and curve shortening. SIAM J. Appl. Math., 1989, 49: 116–133.

[93] Chern I L. Long-time effect of relaxation for hyperbolic conservation laws. Commun. Math. Phys., 1995, 172: 39–55.

[94] Lattanzio C, Marcati P. The zero relaxation limit for the hydrodynamic Whitham traffic-flow model. J. Diff. Eqs., 1997, 141: 150–178.

[95] Liu T P. Hyperbolic conservation laws with relaxation. Commun. Math. Phys., 1987, 108: 153–175.

[96] Lu Y G. Nonstrictly hyperbolic systems with stiff relaxation terms. J. Math. Anal. Appl., 2006, 324: 1407–1416.

[97] Lu Y G, Klingenberg C. The relaxation limit for systems of Broadwell type. Int. Diff. Eqs., 2001, 14: 117–127.

[98] Liu I S, Wu Y M. Vanishing relaxation limit of viscoelasticity. Math. Mech. Solids, 1996, 1: 227–241.

[99] Tzavaras A. Materials with internal variables and relaxation to conservation laws. Arch. Rat. Mech. Anal., 1999, 146: 2, 129–155.

[100] Kurganov A, Tadmor E. Stiff system and hyperbolic conservation laws: Convergence and error estimates. SIAM J. Math. Anal., 1997, 28: 1446–1456.

[101] Tveito A, Winther R. On the rate of convergence to equilibrium for a system of conservation laws including a relaxation term. SIAM J. Math. Anal., 1997, 28: 136–161.

[102] Lu Y G, Klingenberg C. A mixed type system of three equations modelling reacting flows. Proc. Amer. Math. Soc., 2003, 131: 3511–3516.

[103] Lu Y G, Klingenberg C. The Cauchy problem for hyperbolic conservation laws with three equations. J. Math. Anal. Appl., 1996, 202: 206–216.

[104] Lu Y G. Relaxation limit for hyperbolic systems in chromatography. Proc. Amer. Math. Soc., 2002, 130: 3579–3583.